

## 6. CONDITIONS DE DEVELOPPEMENT DE L'HETEROGENEITE – CRITERE DE LOCALISATION.

Dans les chapitres précédents, nous avons analysé les structures d'hétérogénéité compatibles avec l'Approche Energétique, indépendamment de la question de leur développement. Le présent chapitre, à l'inverse, s'intéresse à la question du développement des hétérogénéités, indépendamment de leurs structures.

Nous détaillerons en premier lieu, d'un point de vue assez général, sous quelles conditions des hétérogénéités présentes dans le milieu en mouvement auront tendance, soit à se développer, soit à s'atténuer. Nous verrons que ces conditions sont d'ordre énergétique: elles sont reliées à la convexité du taux de dissipation spécifique d'énergie mécanique, comme conséquence de la Règle de moindre dissipation. Sur ces bases, nous analyserons ensuite la question du critère de localisation, dans le cadre d'une représentation simplifiée de l'évolution du comportement du milieu granulaire, permettant la confrontation détaillée avec des résultats expérimentaux.

### 6.1 CONDITIONS DE DEVELOPPEMENT DE L'HETEROGENEITE

#### 6.1.1 Représentation par les variables internes

Au cours du mouvement, sous des conditions aux limites données, le comportement mécanique d'un domaine matériel peut être envisagé comme une réponse du milieu vis à vis d'une sollicitation imposée, en fonction d'un ensemble de **variables internes**, qui évoluent avec le mouvement. Cette réponse du milieu est en général appréciée par des mesures de grandeurs moyennes (*contraintes et taux de déformation moyens, taux de dissipation d'énergie moyen, volume spécifique moyen etc...*). La question de l'incidence de l'hétérogénéité, devient ici celle de **l'incidence de la dispersion des variables internes locales sur les grandeurs moyennes** qui caractérisent la réponse du milieu.

Dans le domaine matériel que nous suivons dans son mouvement, l'évolution du comportement mécanique implique des variations du volume spécifique (*dilatance, contraction...*); nous admettons de ce fait que les variables internes pertinentes peuvent toujours être rapportées à la masse, c'est à dire que quelle que soit la partition d'un domaine D en deux sous ensembles A, B, les valeurs moyennes des variables

internes pertinentes vérifient:

$$\bar{X}_{(A \cup B)} = \frac{m(A) \cdot \bar{X}(A) + m(B) \cdot \bar{X}(B)}{m(A) + m(B)}.$$

Nous admettons aussi que ces variables internes peuvent être classées en **groupes autonomes**  $\{[X_i], [Y_k], [Z_n], \dots\}$ , tels qu'une variable d'un groupe soit indépendante de toute variable des autres groupes, c'est à dire que les covariances sont nulles entre groupes:

$$Cov[X_i, Y_k] = Cov[Y_l, Z_n] = Cov[Z_m, X_j] = 0$$

### 6.1.2 Expression du taux de dissipation spécifique

Pour des raisons thermodynamiques, le milieu doit évoluer vers un mouvement minimisant la dissipation d'énergie, suivant la Règle de moindre dissipation (Annexe 1-2). Nous nous intéresserons donc naturellement à la puissance moyenne dissipée par unité de masse (ou *taux de dissipation spécifique*), en présence d'hétérogénéités dans la répartition des variables internes. Considérons donc un domaine matériel que nous suivons dans son mouvement; domaine que nous envisageons comme la réunion de cellules élémentaires de masses égales, dont les propriétés locales déterminent les propriétés moyennes du domaine Figure 6-1.

Dans un diagramme représentant la variation d'une grandeur moyenne au cours du mouvement, telle le taux de dissipation spécifique  $\dot{\omega}$ , en fonction du temps et de variables internes  $X, Y$ , le point  $M_D$  (respectivement la trajectoire) représentant l'ensemble du domaine, est le barycentre d'un nuage de points (resp. de trajectoires) correspondant aux cellules élémentaires.

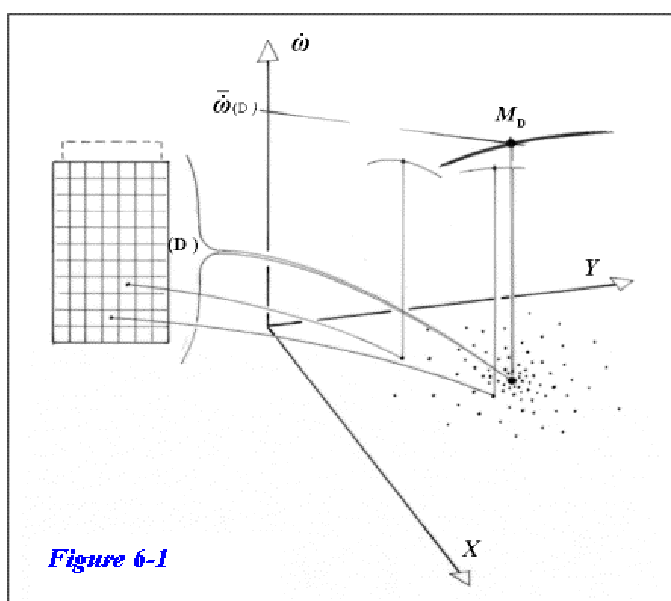


Figure 6-1

La dispersion du nuage croît avec le facteur d'échelle entre le domaine et les cellules élémentaires (si les fluctuations locales des variables internes dans les cellules peuvent être considérées comme indépendantes, l'ordre de grandeur de la dispersion est donné par ( voir [31] par exemple):

$$\frac{\sqrt{\overline{(\tilde{X}_c)^2}}}{\overline{X_c}} \propto \frac{1}{\sqrt{m_c}}$$

Sous conditions aux limites régulières, et tant que l'hétérogénéité

n'est pas significativement développée à l'échelle macroscopique, si nous faisons croître la dimension de nos cellules élémentaires par rapport au domaine (ou si le domaine est suffisamment vaste pour être divisé en cellules elles-mêmes largement macroscopiques), à partir d'un certain seuil, nous pourrions considérer que:

- chaque cellule est "raisonnablement" représentative de l'ensemble du domaine;
- les valeurs moyennes des variables internes attachées à chaque cellule sont "raisonnablement" dispersées par rapport aux valeurs moyennes correspondantes sur le domaine tout entier;
- la relation fonctionnelle entre taux de dissipation spécifique et variables internes, en moyenne sur chaque cellule, est voisine de celle relative au domaine tout entier, lorsque les variables internes y sont uniformes  $\bar{\omega}_{(c)} \approx f\left\{\left[\overline{X_{(c)}}\right], \left[\overline{Y_{(c)}}\right], \left[\overline{Z_{(c)}}\right]\right\}$ , cette relation fonctionnelle est supposée continue et différentiable au second ordre dans ce qui suit.

Sur une telle partition du domaine matériel, les moyennes des variables internes dans les cellules, peuvent être considérées comme distribuées aléatoirement autour de leurs moyennes sur le domaine tout entier.

Le taux de dissipation spécifique moyen sur le domaine, apparaît donc comme une fonction d'un ensemble de variables à distributions aléatoires (*les moyennes des variables internes dans les cellules*), distribuées autour de leur valeur moyenne sur le domaine.

Dans un tel cas, un résultat classique en Statistique relie l'espérance mathématique de la fonction, c'est à dire la moyenne mesurable, à la fonction des valeurs moyennes des variables d'une part, et d'autre part, à la dispersion des distributions de ces variables autour de leurs moyennes (*voir par exemple [32]*). Plus précisément, ce résultat qui nous permettra dans ce qui suit de formuler comment l'hétérogénéité participe à minimiser la dissipation d'énergie, établit la relation au 2<sup>ème</sup> ordre (6.1), où les dérivées secondes  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \right|_m$  sont prises pour les valeurs moyennes des variables internes

$X_i, X_j$  sur  $D$ , et où les termes diagonaux représentent en fait les termes de variance des variables internes, car  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_j} \right|_m \cdot \text{Cov}[X_j, X_j] = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial X_j^2} \right|_m \cdot \text{Var}[X_j]$ :

$$(6.1) \quad E\{\dot{\omega}, D\} = \bar{\dot{\omega}}(D) \approx f\left\{\left[\overline{X_i(D)}\right], \left[\overline{Y_k(D)}\right], \left[\overline{Z_n(D)}\right]\right\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \right|_m \cdot \text{Cov}[X_i, X_j] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial Y_k \partial Y_l} \right|_m \cdot \text{Cov}[Y_k, Y_l] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} \sum_{n,p} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial Z_n \partial Z_p} \right|_m \cdot \text{Cov}[Z_n, Z_p]$$

Nous voyons apparaître ici comment les propriétés au 2<sup>ème</sup> ordre vont déterminer la sensibilité à l'hétérogénéité; toutefois (6.1) relie cette sensibilité à la configuration au 2<sup>ème</sup> ordre de la fonction  $f$ , qui n'est pas directement accessible dans l'expérience. Néanmoins, comme nous analysons ici les conditions d'**initiation** de l'hétérogénéité macroscopique, tant que celle-ci n'est pas pleinement développée, nous pouvons raisonnablement admettre que  $\bar{\dot{\omega}}(D)$ , qui est mesurable, est un estimateur suffisant pour les caractères pertinents de la configuration au 2<sup>ème</sup> ordre de  $f$  (directions propres et signature). C'est ce que nous admettrons dans ce qui suit, en raisonnant directement sur  $\bar{\dot{\omega}}(D)$  en lieu et place de  $f$ .

### 6.1.3 Conditions de développement/atténuation de l'hétérogénéité

Considérons une fluctuation statistique générant des écarts locaux sur certaines des variables internes, tels que ces écarts entraînent une diminution locale du taux de dissipation sur un sous-domaine  $D_1$ . Cet affaiblissement local du taux de dissipation entraîne donc, toutes choses égales par ailleurs, un affaiblissement local de la résistance au mouvement, et donc une tendance à la concentration des mouvements sur  $D_1$ , par effet de moindre résistance. Tant que le taux de dissipation y sera plus faible

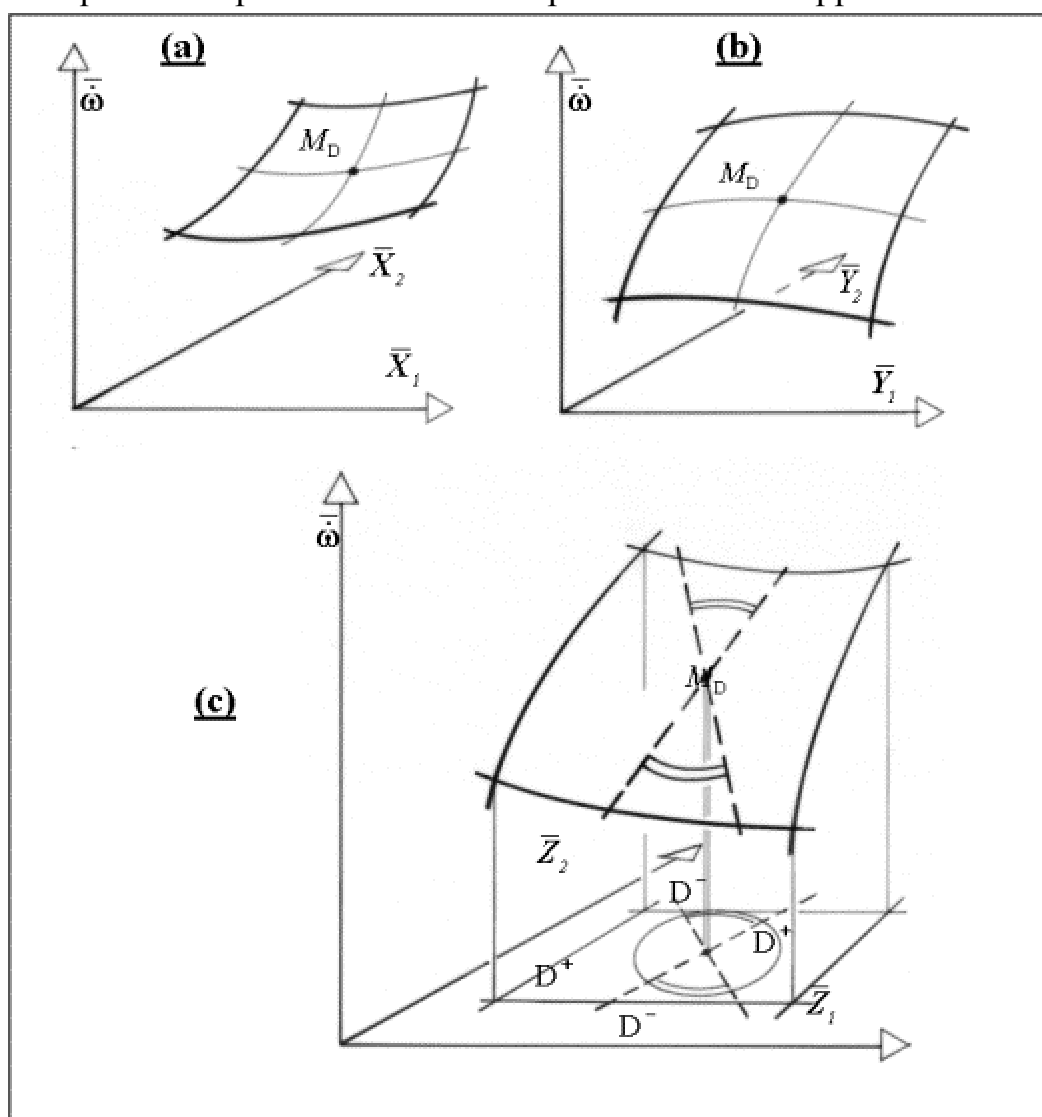
qu'ailleurs, cette concentration des mouvements sur  $D_1$  aura tendance à perdurer, voire à s'amplifier (*dans des proportions compatibles avec les conditions aux limites et les liaisons internes du milieu – conditions d'équilibre, compatibilité des mouvements... –*), c'est à dire à augmenter sur  $D_1$  les écarts sur les variables internes concernées, en y accélérant leur évolution par rapport à la moyenne.

Inversement, une fluctuation statistique entraînant une croissance locale du taux de dissipation fera apparaître une plus grande résistance au mouvement, et donc une tendance à l'atténuation des mouvements sur  $D_1$ , c'est à dire une tendance à y freiner l'évolution des variables internes concernées.

Remarquons que le premier cas correspond au développement d'une hétérogénéité, tandis que le second

correspond à l'atténuation d'une hétérogénéité, dans le sens d'une évolution vers la moindre dissipation.

Observons aussi que l'équation (6.1) en donne une approche simple, attachée aux propriétés au 2<sup>nd</sup> ordre du taux de dissipation spécifique moyen.



**Figure 6-2 :** Les 3 configurations du taux de dissipation au 2<sup>nd</sup> ordre

L'analyse des configurations possibles de ces termes du 2<sup>nd</sup> ordre (Annexe 6-1), permet de définir les situations qui augmentent le taux de dissipation, ou au contraire qui le diminuent, Figures 6-2-a), 6-2-b), et 6-2-c).

**pour un groupe autonome de variables internes:**

**-a) soit la matrice  $\left[ \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial X_i \partial X_j} \right]_m$  est définie positive, et les termes**

$\left. \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial X_i \partial X_j} \right|_m .Cov[X_i, X_j]$  seront **tous**  $\geq 0$  au cours du mouvement, c'est à

dire  $\delta^2 \bar{\dot{\Omega}} \geq 0$ , l'évolution du milieu vers la moindre dissipation tendra à **atténuer** toute hétérogénéité statistique sur ce groupe de variables internes, Figure 6-2-a);

**-b) soit la matrice  $\left[ \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial Y_k \partial Y_l} \right]_m$  est définie négative, et les termes**

$\left. \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial Y_k \partial Y_l} \right|_m .Cov[Y_k, Y_l]$  seront **tous**  $\leq 0$  au cours du mouvement, c'est à

dire  $\delta^2 \bar{\dot{\Omega}} \leq 0$ , l'évolution du milieu vers la moindre dissipation tendra à **développer** toute hétérogénéité statistique sur ce groupe de variables internes, Figure 6-2-b);

**-c) soit la matrice  $\left[ \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial Z_n \partial Z_p} \right]_m$  est “croisée”, et les termes**

$\left. \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial Z_n \partial Z_p} \right|_m .Cov[Z_n, Z_p]$  seront pour partie  $\leq 0$  et pour l'autre partie  $\geq 0$ ,

on montre (Annexe 5-1) que la structure de la matrice  $\left[ \frac{\partial^2 \bar{\dot{\Omega}}}{\partial Z_n \partial Z_p} \right]_m$

sépare l'espace des variables internes de ce groupe en (Figure 6-2-c):

- un domaine de fluctuations  $D^-$  sur lesquelles  $\delta^2 \bar{\dot{\Omega}} \leq 0$ , et qui auront donc tendance à se développer dans l'évolution du milieu vers la moindre dissipation;
- un domaine de fluctuations  $D^+$  sur lesquelles  $\delta^2 \bar{\dot{\Omega}} \geq 0$ , et qui auront donc tendance à s'atténuer dans l'évolution du milieu vers la moindre dissipation

Les conditions de développement ou de l'atténuation de l'hétérogénéité sont donc celles de la **convexité** “vers le haut” (termes  $\delta^2 \bar{\dot{\Omega}} \leq 0$ ) ou “vers le bas” (termes  $\delta^2 \bar{\dot{\Omega}} \geq 0$ ) **du taux de dissipation spécifique moyen**, par rapport aux variables internes.

## 6.2 CRITERE DE LOCALISATION

A partir des résultats précédents, nous pouvons envisager maintenant la localisation des déformations comme le développement d'une hétérogénéité en déformations, accompagnée par l'amplification d'écarts sur certaines variables internes, comme le volume spécifique. Toutefois, pour aller plus loin et confronter un tel *Critère de localisation* avec des données expérimentales, il convient d'abord de

préciser la description du milieu, et en particulier de définir une représentation de l'évolution en déformation.

### 6.2.1 Représentation de l'évolution en déformation, au cours du mouvement

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cadre de mouvements voisins de la dissipation minimale, avec coaxialité simple entre contraintes et taux de déformation (qui ont même repère propre localement).

Nous admettrons que parmi les variables internes qui décrivent l'évolution du milieu, un groupe autonome pertinent est formé par:

- le volume spécifique  $v_s$  ;
- une variable attachée aux déformations cumulées, que nous désignerons par "déformation spécifique", qui définit l'évolution en déformation, notée  $E(D, t_0, t)$  .

Le principe d'une telle représentation est classique, et correspond à la transposition de théories de l'écrouissage développées par les pionniers de la plasticité des métaux, tels Nádai (voir [26]).

L'examen des propriétés que doit posséder une telle variable  $E(D, t_0, t)$ , pour maintenir la cohérence avec l'Approche Energétique, conduit au moins aux 5 propriétés suivantes:

- **a)** la variable  $E(D, t_0, t)$  est cumulative par rapport au temps, entre les dates successives  $t_0 \leq t_1 \leq t_2$  elle vérifie toujours

$$E(D, t_0, t_2) = E(D, t_0, t_1) + E(D, t_1, t_2)$$

- **b)** la variable  $E(D, t_0, t)$  est extensive par rapport au domaine matériel, relativement à la masse; si A, B sont deux domaines disjoints, elle vérifie toujours

$$E(A \cup B, t_0, t) = \frac{m(A).E(A, t_0, t) + m(B).E(B, t_0, t)}{m(A) + m(B)}$$

- **c)** la variable  $E$  étant associée au processus de dissipation irréversible attaché au mouvement, elle présente également le caractère d'irréversibilité, c'est à dire qu'elle est une fonction strictement monotone du temps dès que  $\underline{\dot{\epsilon}} \neq \mathbf{0}$  sur un sous-domaine de  $D$  ; nous choisirons une fonction strictement croissante;

- **d)** le taux d'accroissement de  $E(D, t_0, t)$  est positivement homogène et de degré 1 par rapport aux taux de déformation moyens  $\overline{\underline{\dot{\epsilon}}}(D)$  sur  $D$  ;

- **e)** la variable  $E(D, t_0, t)$  possède le même degré de compatibilité avec l'hétérogénéité des mouvements intérieurs, que le processus dissipatif lui-même, tout au moins au voisinage de la dissipation minimale.

L'Annexe 6-2 précise les fonctions qui satisfont à ces propriétés, nous prendrons ici la définition:



$$E(D, t_0, t) = \frac{1}{m_D} \int_{t_0}^t \left\{ \int_D \frac{1}{2} [N_{\parallel} \{ \dot{\underline{\epsilon}} \}] dv \right\} d\tau \quad (6.2)$$

qui est dimensionnellement homogène à un volume spécifique, (*nous verrons plus loin Chapitre 7, tout l'intérêt de ce choix particulier: en déformation plane, Es'exprime simplement en fonction du taux de cisaillement moyen  $\bar{\dot{\gamma}}$* ).

Dans ce qui suit, nous nous restreindrons au cas des sollicitations de Mode I (+,-,-), sous contrainte de confinement contrôlé, qui recouvrent les sollicitations expérimentales courantes (du triaxial "compression", au "biaxial" en déformation plane).

### 6.2.2 Diagrammes expérimentaux du taux de dissipation spécifique

La figure 6-3 représente les résultats d'écrasements contrôlés d'éprouvettes axissymétriques de milieux granulaires confinés sous membrane souple, constitués de granulats calcaires concassés (*donc particulièrement anguleux et rugueux*) pris dans un même stock, conditionnés sous trois densités initiales différentes (*dense, mi-dense, lâche*), soumis à une contrainte modérée de confinement axissymétrique constante de 50 kPa ( $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 50 \text{ kPa}$ ), et lentement déformés en imposant une vitesse de déformation constante suivant leur axe ( $\bar{\dot{\epsilon}}_1 = \text{Cste}$ ), c'est à dire des "essais triaxiaux en compression".

Dans ce type d'expériences:

- les conditions aux limites imposées sont la contrainte radiale de confinement  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$ , et la vitesse de déformation axiale  $\bar{\dot{\epsilon}}_1$  ;
- la réponse du milieu est la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_1$  d'une part, et d'autre part l'ensemble des déformations radiales  $\bar{\dot{\epsilon}}_2$  et  $\bar{\dot{\epsilon}}_3$ , dont la somme est mesurée par l'intermédiaire des déformations moyennes en volume.

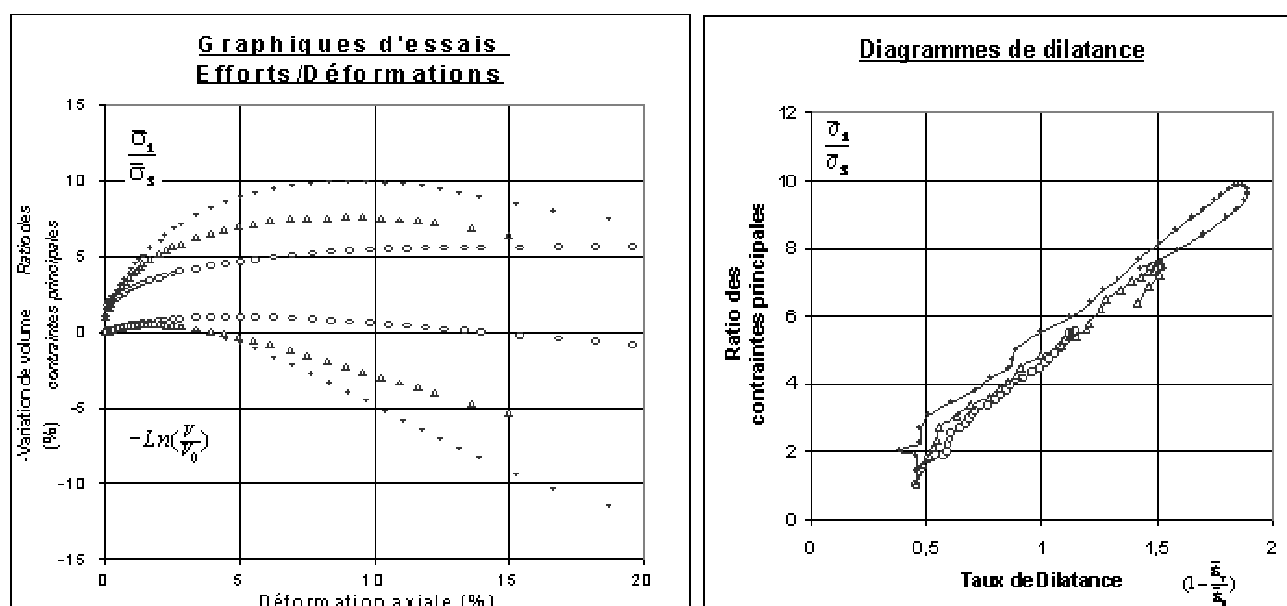
Observons Figure 6-3, que dans le "diagramme de dilatance" de coordonnées

( $x = 1 - \frac{\bar{\dot{\epsilon}}_v}{\bar{\dot{\epsilon}}_1}$ ,  $y = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_3}$ ), les résultats de ces expériences se trouvent remarquablement

regroupés sur une même droite, indépendante de l'état initial. Cette configuration, qui correspond précisément à l'équation de dissipation de l'Approche Energétique avec  $R = \text{Cte}$  (voir [17]), s'interprète comme la stabilisation des conditions internes du milieu granulaire, dans un voisinage de la dissipation minimale.

Le retraitement des mesures expérimentales permet de calculer les valeurs correspondantes des deux variables  $\bar{v}_s$  volume spécifique moyen, et  $E(D, t_0, t)$  déformation spécifique moyenne définie précédemment (équation 6.2), et du du taux de dissipation spécifique moyen

$$\bar{\dot{\omega}} = \bar{v}_s \cdot \text{Tr} \left\{ \underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) \right\} = \bar{v}_s \cdot (\bar{\sigma}_1 \bar{\dot{\epsilon}}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\dot{\epsilon}}_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{\dot{\epsilon}}_3).$$



**Figure 6-3 Résultats d'essais sur un matériau calcaire concassé**

.(—•— milieu dense; —Δ— milieu semi dense; —○— milieu lache)

Remarquons que ce taux de dissipation est positivement homogène et de degré 1, par rapport aux contraintes, et par rapport aux taux de déformations. Il s'ensuit que pour ce type de sollicitation des “essais triaxiaux en compression”, il est possible de s'affranchir de l'effet des conditions aux limites, en rapportant la dissipation spécifique aux conditions aux limites constantes imposées  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = Cste$  et  $\bar{\epsilon}_1 = Cste$ , en déterminant un “taux de dissipation spécifique

réduit” égal à  $\frac{\bar{\dot{\omega}}}{\bar{\sigma}_3 \cdot \bar{\epsilon}_1} = v_s \cdot \left[ \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_3} - \left( 1 - \frac{\bar{\epsilon}_v}{\bar{\epsilon}_1} \right) \right]$ , dimensionnellement homogène à un volume spécifique.

Remarquons aussi que par définition de la déformation spécifique  $E(D, t_0, t)$ , la date initiale  $t_0$  n'a qu'une signification conventionnelle, relative à une expérience donnée, et ne constitue pas une origine des temps objective, qui serait commune à toutes les expériences. De ce fait, si nous désirons comparer des résultats issus d'expériences différentes, par exemple pour évaluer l'incidence de fluctuations de densité à un moment donné dans notre milieu granulaire, nous devons trouver une méthode objective pour nous affranchir de l'inconvénient de cette date initiale arbitraire  $t_0$ , et comparer des situations objectivement comparables.

La solution à cette difficulté est donnée par la prise en compte des efforts intérieurs:

- à un moment donné dans le type de mouvements que nous envisageons, des sous-domaines macroscopiques de dimensions suffisantes sont soumis à un même état de contraintes moyennes que l'ensemble du domaine que nous considérons;
- des comparaisons d'une expérience à l'autre doivent donc se faire à *conditions d'équilibre statique identiques*, en termes d'état de contraintes;



- dans l'espace  $\{E(D, t_0, t), \bar{v}_s, \bar{\dot{\omega}}\}$  une image complètement objective des trajectoires à *conditions d'équilibre statique identiques* sera donnée en projection sur le plan  $\{\bar{v}_s, \bar{\dot{\omega}}\}$  (car ces deux grandeurs sont complètement objectives); les projections sur les autres plans  $\{E(D, t_0, t), \bar{\dot{\omega}}\}$  et  $\{E(D, t_0, t), \bar{v}_s\}$ , étant affectées par l'inconvénient de cette date initiale arbitraire  $t_0$  dans la définition de  $E(D, t_0, t)$ , n'ont qu'une objectivité relative.

La Figure 6-4 représente les résultats de nos 3 expériences, dans l'espace des trois grandeurs physiques {déformation spécifique, volume spécifique, taux de dissipation spécifique réduit}, avec les trajectoires à mêmes conditions d'équilibre statique, sous la forme de trois projections planes dans l'espace  $\{E(D, t_0, t), \bar{v}_s, \bar{\dot{\omega}}\}$  :

- figure 6-4 a), en projection sur le plan {volume spécifique, taux de dissipation réduit}, les projections des *trajectoires à mêmes conditions d'équilibre statique* sont en trait fin;
- figure 6-4 b), en projection sur le plan {déformation spécifique, taux de dissipation réduit};
- figure 6-4 c), en projection sur le plan {déformation spécifique, volume spécifique}.

Observons sur ces résultats que:

- les projections des *trajectoires à mêmes conditions d'équilibre statique* qui ont pu être tracées (figure 6-4 a) présentent une légère courbure toujours dans le même sens (correspondant à un  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} > 0$ ), nous admettrons qu'il s'agit là d'un caractère général;
- en ce qui concerne la convexité des *trajectoires expérimentales*, deux domaines peuvent être distingués, séparés par une frontière correspondant à l'état caractéristique, approximativement  $\frac{\bar{\dot{\omega}}}{\sigma_3 \cdot \dot{\epsilon}_1} \approx 0,0028$ : au delà de cette frontière les

*trajectoires expérimentales* présentent la même convexité sur les deux projections principales (figures 6-4 a) et 6-4 b) avec  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ , tandis qu'en deçà, la situation paraît plus complexe.

Ces deux observations structurent l'interprétation de ces diagrammes. Rappelons enfin que sous chargement monotone, l'Approche Energétique prévoit qu'au delà de l'état caractéristique, le milieu granulaire se dilate au cours de la déformation, tandis qu'en deçà il se contracte (voir [17]).

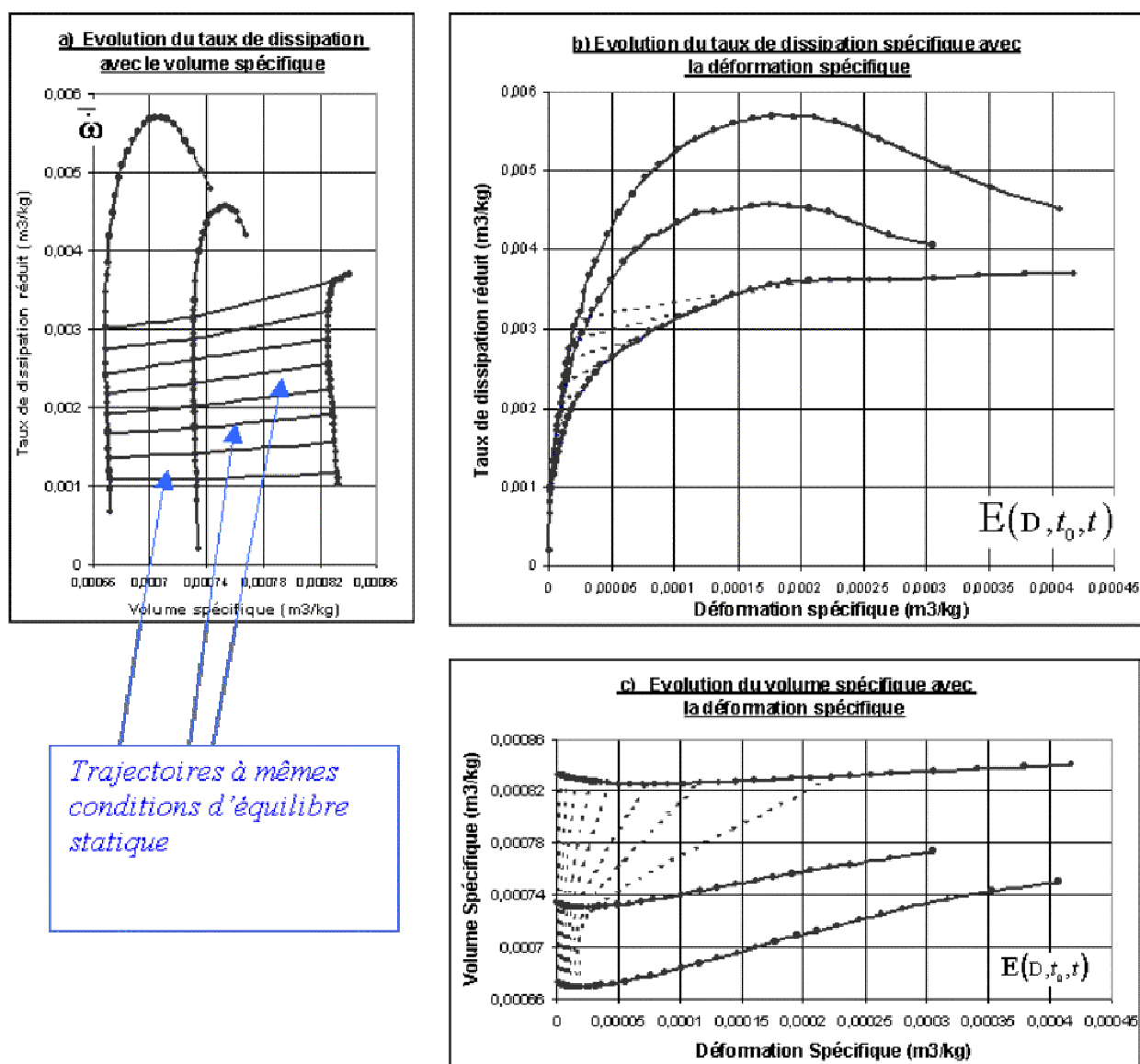


Figure 6-4 Expérimentations de la figure 6-3, transcrites dans l'espace  $\{E(D, t_0, t), \bar{v}_s, \bar{\dot{\omega}}\}$

### 6.2.3 Interprétation des résultats

#### Au delà de l'état caractéristique

La configuration de la surface  $\bar{\dot{\omega}}$  fonction de  $E(D, t_0, t)$  et  $\bar{v}_s$ , qui résulte des mesures de la Figures 6-4, est schématisée sur la Figure 6-5. Au point courant  $M_D(t_0)$  figurant l'état moyen du domaine matériel à un instant  $t_0$ , se croisent deux lignes remarquables:

- une ligne  $T_{sm}$  figurant la *trajectoire expérimentale sous sollicitation monotone*, et le long de laquelle  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ ;
- une ligne  $T_{eq}$  figurant une *trajectoire conservant les conditions d'équilibre statique*, qui résulterait de fluctuations quasi-instantanées de densité au cours du mouvement,

donc à  $E(D, t_0, t) \approx Cste$ , autrement dit  $T_{eq}$  est située dans un plan  $\{\bar{v}_s, \bar{\dot{\omega}}\}$ , et le long de laquelle on a vu que  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} > 0$ ;  
 -au cours du mouvement à partir de  $M_D(t_0)$ , le point représentatif se déplace vers la droite du diagramme, car pour un instant  $t$  ultérieur à  $t_0$ ,  $E(t_0, t) > 0$ .

Cette configuration correspond au cas c) analysé plus haut en section 6.1.3 (et en Annexe 6-1). Au cours du mouvement de  $t_0$  à  $t = t_0 + \Delta t$ , à partir de  $M_D(t_0)$ , intégrant d'éventuelles fluctuations dans le domaine matériel sur les variables  $E(t_0, t)$  et  $v_s$ , le point courant  $M_D(t_0)$  se transforme en un point  $M_D(t)$ , et suivant la direction du vecteur  $\overrightarrow{M_D(t_0)M_D(t)}$ , on aura soit  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ , soit  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} > 0$ ; par ailleurs cette direction du vecteur  $\overrightarrow{M_D(t_0)M_D(t)}$  matérialise un axe de corrélation entre les variables, dans les fluctuations accompagnant le mouvement.  
 Plus précisément on a vu qu'à partir de  $M_D(t_0)$ , peuvent être tracées deux lignes caractéristiques sur lesquelles  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} = 0$ , séparant la surface en deux domaines, l'un sur lequel  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ , l'autre sur lequel  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} > 0$ , Figure 6-5.  
 Dans cette configuration, le milieu aura donc tendance à développer de l'hétérogénéité statistique au cours du mouvement, en amplifiant des fluctuations correspondant au secteur  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ .

Sous sollicitation monotone, le milieu devant généralement se dilater pour atteindre l'état critique, les fluctuations qui seront amplifiées sont, parmi celles qui sont situées dans ce secteur  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ , celles qui comportent une corrélation positive entre déformation spécifique et volume spécifique (déformation avec dilatance).

Toutefois, la Figure 6-5 montre que le *taux de dilatance moyen*  $\frac{\delta \bar{v}_s}{\delta E}$  admissible dans ce processus, *est limité* par une des lignes caractéristiques (notée *Dil* sur la Figure 6-5)

### ***En deçà de l'état caractéristique-***

Les résultats montrés Figure 6-4 suggèrent deux phases, séparées par une frontière correspondant approximativement à  $\frac{\bar{\dot{\omega}}}{\sigma_3 \cdot \dot{\epsilon}_1} \approx 0,0020$ .

En dessous de cette frontière, c'est à dire approximativement pour  $0 \leq \frac{\bar{\dot{\omega}}}{\sigma_3 \cdot \dot{\epsilon}_1} \leq 0,0020$ , les deux projections des trajectoires expérimentales (figures 6-4

a) et 6-4 b)) ont même convexité, correspondant à un  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$  le long de la trajectoire.

Entre cette frontière et l'état caractéristique, c'est à dire approximativement pour  $0,0020 \leq \frac{\bar{\dot{\omega}}}{\sigma_3 \cdot \dot{\epsilon}_1} \leq 0,0028$ , les deux projections des trajectoires expérimentales n'ont plus la même convexité (figures 6-4 a) et 6-4 b)). Toutefois, si l'on tient compte de ce que le volume spécifique est voisin d'un extremum, et en considérant la troisième projection (figure 6-4-c)), on en conclut que le long de ces trajectoires expérimentales, on a encore  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} \leq 0$ .

Pour cette situation, l'allure générale des résultats demeure donc conforme à la Figure 6-5, et le raisonnement tenu précédemment demeure donc valide.

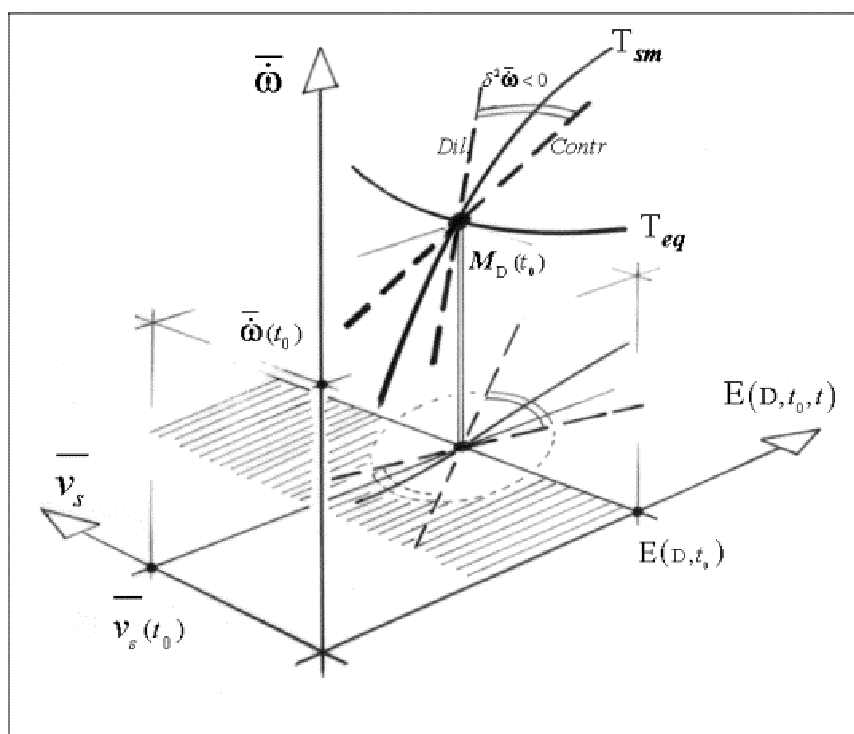


Figure 6-5 Configuration de la surface  $\bar{\dot{\omega}}$  fonction de  $E(D, t_0, t)$  et  $\bar{v}_s$

Dans cette configuration, le milieu aura tendance à développer de l'hétérogénéité statistique au cours du mouvement, en amplifiant des fluctuations correspondant au secteur  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ .

Sous sollicitation monotone, le milieu devant généralement se contracter pour atteindre l'état caractéristique, les fluctuations qui seront amplifiées sont, parmi celles qui sont situées dans ce secteur  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$ , celles qui comportent une corrélation négative entre déformation spécifique et volume spécifique (déformation avec contraction).

Toutefois, la Figure 6-5 montre que le taux de contraction moyen  $-\frac{\delta \bar{v}_s}{\delta E}$  admissible dans ce processus, est limité par une des lignes caractéristiques (notée *Contr.* sur la Figure 6-5)

### **Différence physique entre les deux situations**

Les mouvements avec contraction, qui sont prévus par l'Approche Energétique tant que les états de contraintes demeurent dans un certain voisinage de l'isotropie (voir [17]), induisent des mouvements de serrage entre les granulats. Ces mouvements de serrage sont d'une part très vite limités, du fait de l'encombrement stérique des granulats, et d'autre part engendrent des limitations de compatibilité cinématique entre les mouvements de granulats, ces limitations croissent avec la densité du milieu.

Dans l'autre sens, les mouvements avec dilatance sont seulement limités par le maintien de contacts stables d'une part, et d'autre part atténuent les limitations de compatibilité cinématique entre les mouvements de granulats, qui décroissent avec le volume spécifique du milieu.

Ces caractères physiques montrent une dissymétrie certaine entre les deux situations, il est donc vraisemblable que le développement de telles hétérogénéités statistiques soit vite limité en deçà de l'état caractéristique, en particulier pour les milieux initialement denses, tandis qu'il l'est beaucoup moins au delà de l'état caractéristique.

#### **6.2.4 Conclusions sur le Critère de Localisation**

**L'application des conditions de développement de l'hétérogénéité (Section 6.1) et de résultats de l'Approche Energétique, aux mesures expérimentales sur un milieu granulaire sous sollicitation monotone, indique:**

- des hétérogénéités statistiques couplées entre la déformation  $E$  et le volume spécifique  $v_s$  ont tendance à se développer, comme résultat de la Règle de moindre dissipation, car le long de la trajectoire décrite par le milieu dans l'espace  $\{E, \bar{v}_s, \bar{\dot{\omega}}\}$ , le taux de dissipation spécifique moyen vérifie  $\delta^2 \bar{\dot{\omega}} < 0$  ;
- en *deçà* de l'état caractéristique, ce couplage correspond à une corrélation *négative* entre déformation et volume spécifique, c'est à dire une déformation avec *contraction*;
- au *delà* de l'état caractéristique, ce couplage correspond à une corrélation *positive* entre déformation et volume spécifique c'est à dire une déformation avec *dilatance*;
- l'intensité de cette *contraction* ou de cette *dilatance*, demeure limitée par la configuration de la surface  $\bar{\dot{\omega}}(E, \bar{v}_s)$ .

Des considérations physiques sur la dissymétrie entre les deux types de mouvements suggèrent que le développement de telles hétérogénéités avec couplage négatif serait plus limité que celui des hétérogénéités avec couplage positif, en particulier pour des milieux initialement denses.

Ces éléments indiquent que l'initiation de la localisation des déformations au cours d'une sollicitation monotone, phénomène progressif de nature statistique, débute au moins au voisinage de l'état caractéristique, voire avant pour les milieux initialement lâches.

Ces résultats indiquent une initiation précoce de la localisation au cours du mouvement, bien avant les effets de “pic” de résistance, ce qui est conforme aux données expérimentales publiées dans la littérature (voir [6], [8], [9],[13]):

- dans les expériences représentées figure 6-3, l’initiation de la localisation aurait commencé dès la traversée de la ligne  $x=1$  dans le diagramme de dilatance, voire plus tôt pour le milieu lâche;
- soit, sur les courbes contraintes-déformation, un peu avant la traversée de la ligne  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \approx 5$ , voire plus tôt pour le milieu lâche.