

## 4. STRUCTURES INTERNES MACROSCOPIQUES DANS LES BANDES DE LOCALISATION

Dans cette section, nous envisagerons en premier lieu les bandes de localisation, en déformation plane, comme des zones de maxima du taux de cisaillement, à direction fixe par rapport à la matière, les axes de ces zones de maxima pouvant éventuellement être vus comme des discontinuités cinématiques; et nous nous intéresserons à ce qui se passe à leur voisinage.

Nous montrerons d'abord que cette représentation simple conduit à une structure cinématique stationnaire, confirmée par divers résultats expérimentaux, dont en particulier les mesures fines de S.Nemat-Nasser et N.Okada (2001, [9]).

Nous verrons ensuite que cette structure stationnaire est attribuable à un micromécanisme prévu par l'Approche Energétique du milieu granulaire discontinu: celui de la diffusion de la dissipation (et donc du mouvement) par effet de *réalimentation interne* ([17]). Ce micromécanisme énergétique nous permettra alors de détailler la structure interne en fonction des paramètres matériels et de la dimension moyenne des granulats. Enfin, nous verrons que cette structure définit des bornes relatives, qui encadrent le développement des bandes de localisation.

### 4.1 STRUCTURES CINÉMATIQUES STATIONNAIRES DANS LES BANDES DE LOCALISATION

Dans le schéma continu équivalent, entre les éventuelles discontinuités cinématiques constituant le coeur des bandes de localisation, le champ macroscopique des vitesses de déformations, est continu et dérivable (*continuité et dérivabilité par morceaux*). Enfin, les seuls régimes de déformation stationnaires dans les milieux granulaires étant nécessairement à volume stationnaire (*le volume spécifique ne peut pas varier indéfiniment, sous sollicitation monotone*), nous considérerons des mouvements pour lesquels les variations de volume demeurent négligeables devant les mouvements de distorsion.

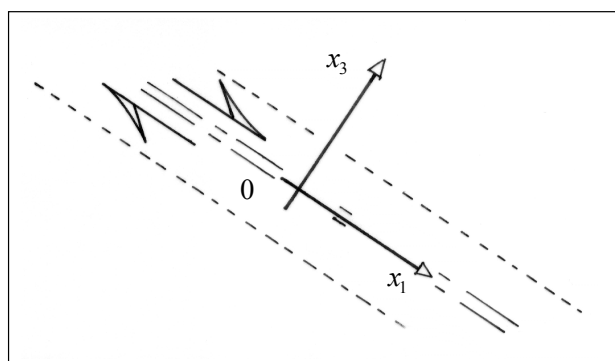


Figure 4-1

Considérons un sous-domaine, limité sur un bord par une ligne de maxima du taux de cisaillement, ou une discontinuité cinématique, repéré par un référentiel attaché à la matière en mouvement, dont les axes sont parallèles aux axes locaux liés à la bande de localisation, Figure 4-1. L'axe n°2 étant pris comme axe neutre de la déformation plane ( $\dot{\epsilon}_2 = 0$ ), nous nous attachons donc à ce qui se passe dans le plan  $\{1,3\}$ , pour  $x_3 > 0$ .

#### 4.1.1 Représentation du mouvement

Dans ce référentiel, un champ de vitesses stationnaire attaché à la bande de localisation sera de la forme :  $\vec{V}(x_1, x_3) = \begin{cases} V_1(x_3) \\ V_3(x_3) \end{cases}$ , avec  $V_3(x_3) \approx 0$  (volume stationnaire), et la position  $\vec{x}(t)$  d'un point matériel à l'instant  $t$  est reliée à sa position de référence  $\vec{X}(t_0)$  à l'instant  $t_0$  par :  $\vec{x}(t_1) = \vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(x_3) dt$ , d'où

$$\vec{x}(t_1) = \begin{cases} X_1(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} V_1(x_3) dt \\ X_3(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} V_3(x_3) dt \square X_3(t_0) \end{cases}.$$

Cette représentation du mouvement permet de définir aussi bien le tenseur des gradients de déplacement par rapport à la configuration de référence (représentation lagrangienne) par:

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} + \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \right), \text{ que celui des vitesses de déformations}$$

$$\text{(représentation eulérienne)} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

#### 4.1.2 Relations de similitude interne cinématique: l'équation de structure stationnaire dans la bande de cisaillement

Considérons à présent les mouvements internes dans le matériau granulaire comme une fonction du champ de vitesses extérieures  $\{\mathbf{V}_E\}$  imposées aux frontières du domaine. On sait que les matériaux granulaires frictionnels en mouvement quasi-statique, ont pour propriété que les mouvements intérieurs sont fonction positivement homogène (au sens algébrique) de degré 1 par rapport à ce champ de vitesses extérieures.

Donc si  $\lambda$  est un facteur  $>0$ , la transformation  $\{\mathbf{V}_E\} \rightarrow \{\lambda \mathbf{V}_E\}$  se traduit dans les

$$\text{mouvements intérieurs par } \begin{cases} \underline{\dot{\epsilon}} \\ grad(\underline{\dot{\epsilon}}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda \underline{\dot{\epsilon}} \\ \lambda grad(\underline{\dot{\epsilon}}) \end{cases}$$

Or le tenseur des vitesses de déformations vaut ici

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{dV_1}{dx_3} \\ \frac{1}{2} \frac{dV_1}{dx_3} & 0 \end{bmatrix}$$

La propriété précédente de similitude interne cinématique implique donc que

$$\frac{\left(\frac{d^2 V_1}{dx_3^2}\right)}{\left(\frac{dV_1}{dx_3}\right)} = f(x_3) \quad (4.1)$$

où la fonction inconnue  $f(x_3)$  n'est plus qu'homogène de degré zéro par rapport au champ des vitesses extérieures  $\{\mathbf{V}_E\}$ .

Cette relation (4.1), est l' **équation cinématique de structure stationnaire dans la bande de cisaillement**; ses solutions sont de la forme

$$\frac{dV_1}{dx_3}(x_3) = \left[ \frac{dV_1}{dx_3}(0) \right] \cdot \exp \left\{ \int_0^{x_3} f(x) dx \right\}$$

La structure décrite par cette équation est stationnaire par rapport au temps, et par rapport à la coordonnée  $x_1$ . Remarquons que si la fonction  $f(x_3)$  est une constante  $C$ , alors la structure donnée par cette équation devient **complètement stationnaire** dans le temps et dans l'espace, c'est la solution la plus simple de la relation (4.1). La constante  $C$  s'interprète alors comme une caractéristique matérielle.

#### 4.1.3 Solutions complètement stationnaires

Une solution complètement stationnaire, sera donc de la forme  $f(x_3) = C^{te}$ . Comme le bord du domaine considéré, pour  $x_3 = 0$ , est par définition un maximum du taux de cisaillement, seules sont physiquement acceptables les solutions  $f(x_3) = C^{te} \leq 0$ .

Passant alors au taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_{13} = \frac{1}{2} \frac{dV_1}{dx_3}$ , nous obtenons directement une famille de solutions stationnaires en cisaillement, de la forme:

$$\boxed{\dot{\gamma}_{(x_3)} = \dot{\gamma}_{(0)} \cdot \exp(-kx_3)} \quad (4.2)$$

Notant qu'un champ de cisaillement homogène  $\dot{\gamma} = C^{te}$  est aussi solution de cette famille, nous pouvons alors construire des solutions plus élaborées, telle celle du bord d'une bande de localisation dans un champ homogène de cisaillement, d'intensité  $\dot{\gamma}_l$ :

$$\boxed{\dot{\gamma}_{(x_3)} = [\dot{\gamma}_{(0)} - \dot{\gamma}_l] \cdot \exp(-kx_3) + \dot{\gamma}_l} \quad (4.3)$$

La propriété de similitude interne cinématique vue précédemment implique que  $\dot{\gamma}_0$  et  $\dot{\gamma}_l$  sont proportionnels à l'intensité du champ des vitesses extérieures imposées  $\{\mathbf{V}_E\}$ , tandis que le coefficient  $k$  en reste indépendant et doit donc être considéré comme une constante matérielle.

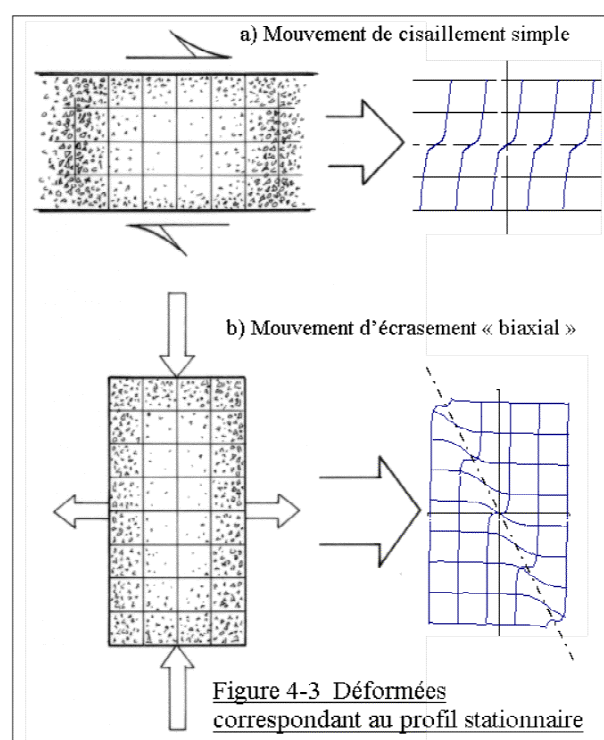
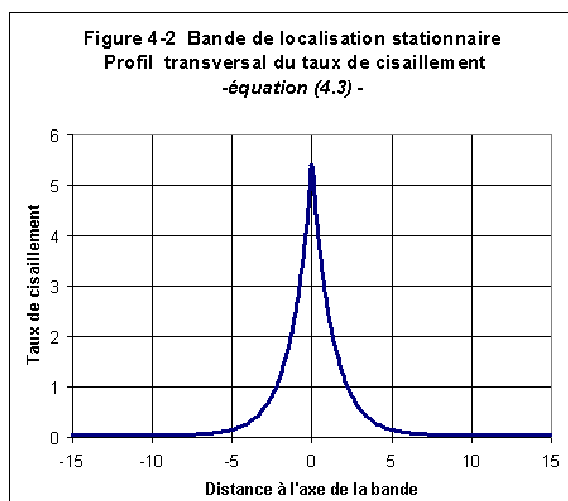
Enfin ayant construit ces solutions à partir du bord d'une discontinuité, ou à partir de l'axe de cisaillement maximal dans une bande de localisation, la solution complète pour l'ensemble d'une bande de localisation sans discontinuité interne, se produisant dans un champ de cisaillement homogène, est constituée par deux champs définis par

*poudres & grains* NS 3 , 1-119 (Octobre 2004)

(4.3), symétriques par rapport à l'axe de cisaillement maximal (obtenus en remplaçant  $x_3$  par  $|x_3|$  dans (4.3)).

Ces éléments permettent de tracer les diagrammes des Figures 4-2 et 4-3, qui détaillent le profil du taux de cisaillement au travers d'une bande de cisaillement, ainsi que les figures de déformation calculées à partir du profil des taux de cisaillement, par la méthode explicitée en section suivante (4.1.4). Ces figures de déformation ont été calculées pour un mouvement global en cisaillement simple, Figure 4-3a), et pour un mouvement global en écrasement biaxial, Figure 4-3b), en tenant compte d'une orientation de la bande correspondant à une valeur type de  $\psi = 30^\circ$  (cf. Chapitre 3).

Observons que dans l'ensemble, l'allure des figures de déformation donnée par cette solution correspond bien aux figures de déformation expérimentales dans les bandes de localisation, publiées dans la littérature.



#### 4.1.4 Confrontation aux résultats expérimentaux de S.Nemat-Nasser et N.Okada (2001)-[9]

Dans leurs expériences, Nemat-Nasser et Okada ont réalisé des mesures micrométriques fines de la structure des déformations en cisaillement, à l'intérieur de bandes de localisation. Toutefois, ces mesures ayant été réalisées par la méthode du gradient des déplacements (tenseur  $F_{ij}$ ), il convient d'abord de relier cette grandeur à celle du taux de cisaillement évalué précédemment (tenseur  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ).

Dans notre représentation, le gradient de déplacement vaut  $\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{U}{2} \\ \frac{U}{2} & 1 \end{bmatrix}$ , avec

$$U = \frac{\partial}{\partial X_3} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V_1(x_3) dt \right], \text{ or l'approximation du volume stationnaire fait qu'ici } x_3 = X_3,$$

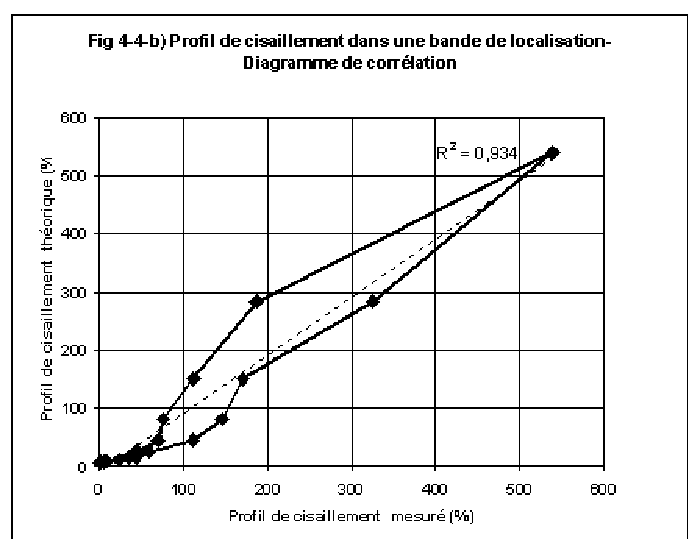
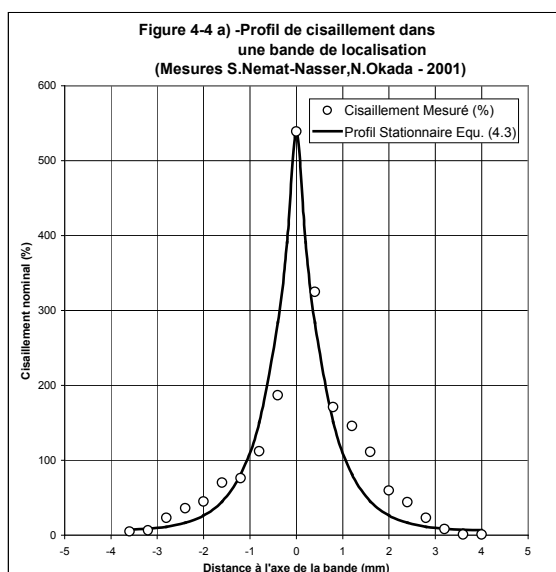
$$\text{d'où } U = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial X_3} (V_1(x_3)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{dV_1}{dx_3} \right) dt.$$

Par ailleurs le tenseur des vitesses de déformations vaut ici:  $\underline{\dot{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{U^*}{2} \\ \frac{U^*}{2} & 0 \end{bmatrix}$ , avec

$$U^* = \frac{dV_1}{dx_3}; \text{ en rapprochant de ce qui précède, il vient: } U^* = \frac{dU}{dt}.$$

Cette dernière égalité signifie que le “cisaillement nominal”  $\Gamma = \frac{U}{2}$  défini par la méthode du gradient des déplacements (tenseur  $\underline{F}$ ), est **dans ce cas particulier de mouvement**, égal à l’intégrale par rapport au temps du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  défini par la méthode du gradient des vitesses (tenseur  $\underline{\dot{\epsilon}}$ ).

Il s’ensuit que, si la structure stationnaire déterminée plus haut est pertinente, le profil de “cisaillement nominal” mesuré dans une bande de localisation doit tendre, en première approximation, vers un profil homothétique du profil des taux de cisaillement défini par l’équation (4.3).



La Figure 4-4 a) présente le profil de mesures de “cisaillement nominal” sur 8 mm de distance centrés sur l’axe de la bande de localisation, après une déformation

moyenne de l'éprouvette de 10% en cisaillement nominal moyen, repris de la publication [9].

Cette figure présente aussi un profil théorique défini au moyen de l'équation (4.3), ajusté sur les valeurs mesurées, en maximisant le coefficient de corrélation.

Ce coefficient de corrélation vaut ici, Figure 4-4-b):  $\sqrt{0,934} \approx \underline{97\%}$ .

Les paramètres ajustés sont: 
$$\begin{cases} k \approx 1,63 \times 10^3 m^{-1} \\ \Gamma_{(0)} \approx 540\% \\ \Gamma_l \approx 5\% \text{ à } 6\% \end{cases}, \quad \text{ce qui signifie que le facteur}$$

de concentration du cisaillement nominal, de la zone axiale par rapport aux bords, est de l'ordre de 100, pour un cisaillement moyen imposé à l'éprouvette d'environ 10%. L'accord qualitatif et quantitatif est particulièrement bon sur la Figure 4-4, d'autant plus que le profil stationnaire en vitesses néglige les variations de volume et autres facteurs transitoires, tandis que la mesure du "cisaillement nominal" sur les déplacements par rapport à la position initiale, les intègre. En particulier, la valeur de 97% du coefficient de corrélation entre valeurs mesurées et valeurs calculées sur le profil ajusté, indique que la décroissance exponentielle avec la distance est effectivement représentative des mesures, avec une bonne approximation.

Il est même étonnant que l'ensemble de ces effets transitoires qui marquent la naissance et le développement d'une bande de localisation, ne soit pas marqué par un écart plus grand entre "profil stationnaire en vitesse de cisaillement" et mesures de "cisaillement nominal", d'autant plus que ces mesures ont été réalisées sur une éprouvette en cylindre creux déformée en cisaillement circulaire, alors que la solution du profil stationnaire établie ici, correspond à la déformation plane.

Ce constat pose la question suivante : notre profil stationnaire établi plus haut par des voies purement cinématiques, paraissant avoir une portée plus large que prévu, pourrait-il être associé à un processus physique sous-jacent, de portée plus générale, résultant aussi d'autres spécificités de la mécanique des matériaux granulaires?

Observons que l'allure globale du profil exponentiel, suggère une perturbation transmise par la zone centrale de la bande vers ses bords, perturbation qui s'atténue rapidement en se propageant vers l'extérieur; ou encore un effet de diffusion du mouvement vers les bords, par un effet analogue à celui d'une couche limite en hydrodynamique.

## 4.2 UN MICROMECHANISME ENERGETIQUE INTERNE AUX BANDES DE CISAILEMENT

### 4.2.1 L'effet de réalimentation interne

Un tel effet de "diffusion" du mouvement existe dans la représentation de la mécanique des milieux granulaires donnée par l'Approche Energétique. Lorsque le milieu granulaire en mouvement sous une sollicitation monotone, tend vers une

solution de dissipation minimale dont les actions intérieures doivent être polarisées, il est vraisemblable que la polarisation ne soit pas achevée à 100% dès les premières phases du mouvement:

- d'une part, une certaine amplitude de mouvements est nécessaire pour atteindre cette polarisation, dont l'orientation est liée aux directions propres de la sollicitation;
- d'autre part, il est possible qu'un certain degré de désordre résiduel minimal, demeure nécessaire pour accommoder la compatibilité des mouvements dans l'amas granulaire discontinu.

Lorsque tel est le cas, ce que nous supposerons par la suite, l'Approche Energétique montre que cet écart par rapport à la polarisation parfaite, amène à des échanges d'énergie mécanique entre contacts élémentaires voisins, au cours du mouvement. Ces échanges influent sur le bilan énergétique global de l'amas granulaire: la puissance **rendue** élémentaire d'un contact (a), peut réalimenter la puissance **reçue** élémentaire du contact voisin (b), c'est la ***réalimentation interne***, dont les éléments essentiels sont résumés en Annexe 1-1, ainsi qu'en section 1.1.2.

Dans l'Approche Energétique de l'amas granulaire discontinu, la mesure de cet effet de réalimentation interne, est donnée par une fonction statistique définie sur la distribution des orientations dans la population des contacts élémentaires en mouvement, dont on a montré qu'elle joue le rôle d'une sorte de fonction d'état. Cette fonction, notée  $R$  ("Taux de réalimentation interne") varie entre un minimum  $R=0$ , réalisé par les solutions de dissipation minimale complètement polarisées, et un maximum  $R=1$  réalisé par les solutions de dissipation Maximale, qui n'ont pas de structure ordonnée bien définie. Cette fonction  $R$  se trouve ainsi mesurer globalement la proportion des puissances **rendues** élémentaires qui se trouvent réabsorbées directement par les puissances **reçues** élémentaires dans le milieu en mouvement.

Dans le cas de la bande de localisation, si une certaine dose de désordre subsiste dans les mouvements granulaires, il est donc envisageable que l'intense dissipation d'énergie dans la zone centrale de la bande, réalimente les bords de la bande, dont les mouvements propres vont dissiper l'essentiel de cette énergie retransmise, en transmettant à leur tour le reliquat vers l'extérieur, et ainsi de suite, dans un processus qui s'atténue rapidement avec la distance.

Par ailleurs, tant que la bande de localisation ne recèle pas de véritable discontinuité macroscopique, les contraintes macroscopiques peuvent y être considérées comme continues, et le taux de dissipation local s'y trouve donc proportionnel au taux de cisaillement local, dans le cas de mouvement qui nous occupe (déformations volumiques négligeables devant celles de distorsion). Si la contrainte macroscopique de cisaillement parallèle à la bande peut être considérée comme approximativement homogène, dans la bande et à son voisinage, ***le profil des taux de cisaillement est alors directement homothétique du profil des taux de dissipation d'énergie.***



Nous verrons au Chapitre 5 que les limitations dues à la Condition d'Equilibre Statique d'une part, et d'autre part dues au Critère de Rupture, font qu'il en est bien ainsi à l'échelle macroscopique.

#### 4.2.2 Le micromécanisme et son bilan énergétique

Découpons la bande de localisation en couches parallèles à partir de la zone axiale, et subdivisons chaque couche en cellules élémentaires Figure 4-5. Nous pouvons alors établir le bilan énergétique de chaque niveau, par rapport à ses voisins, et établir ainsi l'équation différentielle du profil de dissipation d'énergie dans le milieu, à partir de l'axe.

Nous ferons les hypothèses-clés suivantes:

- en dehors de la zone axiale de cisaillement maximal, la dissipation d'énergie dans la bande provient exclusivement de la réalimentation interne;
- le taux de réalimentation interne  $R$  est uniforme dans le matériau;
- l'épaisseur des couches est fixée par une dimension caractéristique matérielle  $D_c$ ;
- les flux de réalimentation étant répartis a priori dans toutes les directions, l'analyse du bilan énergétique amène à regrouper ces flux en *flux intercouches* et *flux intracouches*, dont les proportions sont fixées par un coefficient d'anisotropie  $\alpha$ , uniforme.

Enfin nous raisonnerons par unité de masse du matériau, ce qui, à volume stationnaire, revient à raisonner par unité de volume.

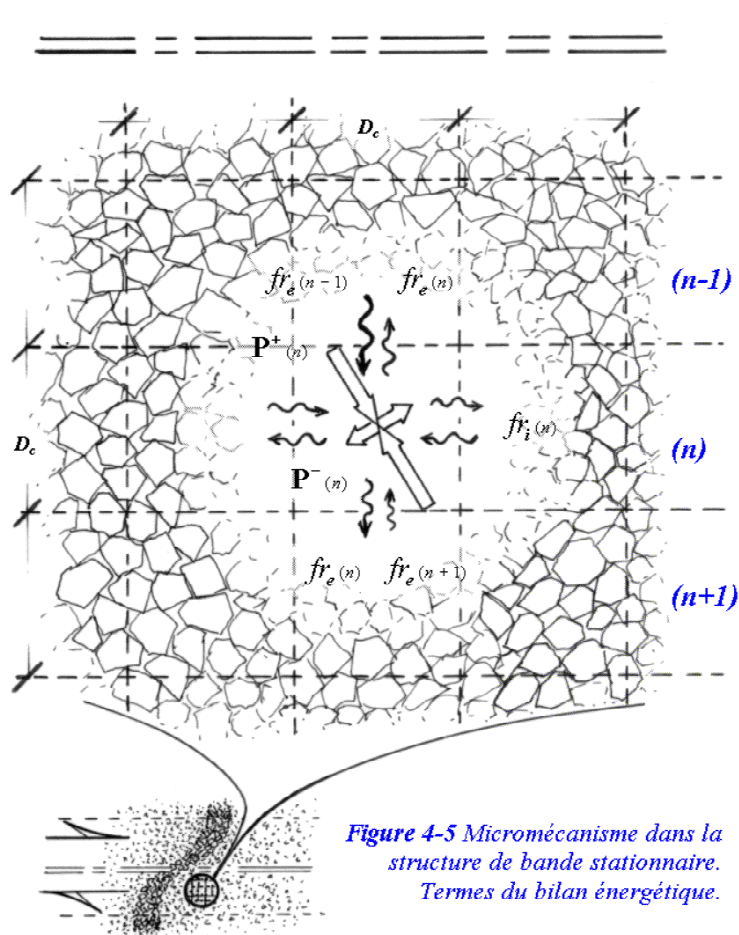


Figure 4-5 Micromécanisme dans la structure de bande stationnaire. Termes du bilan énergétique.

#### Bilan énergétique

Le bilan énergétique à écrire exprime que, dans les cellules de la couche (n), le total des puissances reçues élémentaires est équilibré par la somme:

- des flux de réalimentation *intercouches* transmis par les couches (n-1) et (n+1);
- du flux de réalimentation *intracouche*, interne à la couche (n).



Notant  $\dot{\omega}_{(n)}$  la puissance spécifique dissipée dans la cellule de la couche  $(n)$ , on montre en Annexe 3-1 que les termes du bilan énergétique peuvent s'exprimer en fonction des  $\dot{\omega}_{(n)}$ , et des paramètres de friction physique  $S = \sin \psi$ , du taux de réalimentation interne  $R$ , et du coefficient d'anisotropie dans la réalimentation interne  $\alpha$  :

- le total des puissances reçues élémentaires par unité de masse dans la couche  $(n)$

vaut  $\left( \frac{1+S^*}{2S^*} \right) \cdot \frac{1}{(1-RK_-)} \cdot \dot{\omega}_{(n)}$  avec  $S^* = \frac{S}{1-R(1-S)}$  et  $K_- = \frac{1-S}{1+S}$  ;

- le flux de réalimentation transmis par la couche  $(n-1)$  vaut

$$fr_{e(n-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{(1+\alpha) \cdot (1-R)} \cdot \left( \frac{1-S^*}{2S^*} \right) \cdot \dot{\omega}_{(n-1)}$$

- le flux de réalimentation transmis par la couche  $(n+1)$  est

$$fr_{e(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{(1+\alpha) \cdot (1-R)} \cdot \left( \frac{1-S^*}{2S^*} \right) \cdot \dot{\omega}_{(n+1)}$$

- le flux de réalimentation intracouche, interne à la couche  $(n)$  vaut

$$fr_{i(n)} = \frac{\alpha R}{(1+\alpha) \cdot (1-R)} \cdot \left( \frac{1-S^*}{2S^*} \right) \cdot \dot{\omega}_{(n)}$$

D'où l'écriture du bilan énergétique pour la couche  $(n)$  :

$$\left( \frac{1+S^*}{2S^*} \right) \cdot \frac{1}{(1-RK_-)} \cdot \dot{\omega}_{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{(1+\alpha) \cdot (1-R)} \cdot \left( \frac{1-S^*}{2S^*} \right) \cdot [\dot{\omega}_{(n-1)} + \dot{\omega}_{(n+1)} + 2\alpha \dot{\omega}_{(n)}]$$

qui se simplifie en :  $\dot{\omega}_{(n+1)} - 2 \left[ \frac{(1+\alpha)}{R} \cdot \frac{(1+S)}{(1-S)} - \alpha \right] \dot{\omega}_{(n)} + \dot{\omega}_{(n-1)} = 0$  (4.4)

Cette relation (4.4) est ***l'équation de la diffusion de la dissipation d'énergie, par effet de réalimentation interne.***

#### 4.2.3 Profil du taux de dissipation

Cette suite récurrente classique a pour solutions des combinaisons linéaires de deux solutions particulières indépendantes, de la forme  $\dot{\omega}_{(n)} = a\omega_1^n + b\omega_2^n$  ;

ces solutions particulières  $\omega_1, \omega_2$  s'obtenant comme racines de

$$\omega^2 - 2 \left[ \frac{(1+\alpha)}{R} \cdot \frac{(1+S)}{(1-S)} - \alpha \right] \omega + 1 = 0$$

La solution physiquement pertinente pour la bande isolée, en allant de l'axe vers l'extérieur, est obtenue pour la racine  $\omega_1 < 1$ , qui est positive (*les deux racines  $\omega_1, \omega_2$  étant inverses l'une de l'autre, peuvent s'interpréter comme correspondant aux deux*

orientations possibles du gradient de dissipation, par rapport au sens de repérage des couches, c'est à dire par rapport à la coordonnée  $x_3$ ).

Cette solution s'écrit, sous forme continue ( $n$  est substitué par  $\frac{x_3}{D_c}$ ), en fonction de la

coordonnée  $x_3$  :

$$\dot{\omega}_{(x_3)} = \dot{\omega}_{(0)} \exp \left[ \frac{x_3}{D_c} L n \omega_1 \right] \quad (4.5)$$

En se donnant des valeurs-type pour  $S, R$  et  $\alpha$ , nous pouvons calculer le taux de dissipation dans chaque niveau, en s'éloignant de la zone axiale de la bande vers les bords; ainsi les valeurs  $\{S=0,5$  correspondant à  $\psi = 30^\circ$ ;  $R= 25\%$ ;  $\alpha=1\}$ , déterminent le tableau suivant:

N° de niveau	Zone axiale	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Taux de dissipation (relatif)	100%	2,2%	0,05%	$10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$

La dissipation en cascade définie par ce processus, s'atténue donc très vite avec la distance, d'un facteur 47 entre deux niveaux voisins.

Cela signifie que dans un milieu où les déformations sont localisées, de grandes structures qui dissipent très peu d'énergie (zones à l'extérieur des bandes) transmettent l'énergie à dissiper à des structures plus petites (les bandes de localisation), dans lesquelles l'essentiel de la dissipation est concentrée dans une étroite zone axiale. Nous trouvons ici une certaine analogie qualitative avec un processus de dissipation turbulente en hydrodynamique (*Processus de turbulence en cascade de Kolmogorov-Smirnov: dissipation d'intensité croissante dans des tourbillons de plus en plus petits*)

#### 4.2.4 Profil correspondant des taux de cisaillement - Expression de la constante matérielle $k$

Nous avons vu plus haut que, dans le cas considéré ici, le profil des taux de cisaillement est homothétique à celui des taux de dissipation, d'où:

$$\dot{\gamma}_{(x_3)} = \dot{\gamma}_{(0)} \exp \left[ \frac{x_3}{D_c} L n \omega_1 \right]$$

Nous retrouvons donc le profil exponentiel trouvé plus haut (Equation (4.2)), ce qui permet d'identifier le coefficient de l'exponentielle de (4.2), dont nous avons vu qu'il devait s'interpréter comme une constante matérielle:

$$k = \frac{-1}{D_c} L n \omega_1$$

Tenant compte des ordres de grandeur des divers paramètres, on montre en Annexe 4-3, qu'avec une précision suffisante:

$$k \approx \frac{-1}{D_c} \text{Ln} 2 \left\{ \frac{(1+\alpha)}{R} \frac{(1+\sin \psi)}{(1-\sin \psi)} - \alpha \right\} \quad (4.6 \text{ a})$$

L'incidence des paramètres physiques est donc la suivante :

- à friction plus petite ( $\sin \psi$ ) , ou à désordre plus grand ( $R$ ), ou à prédominance croissante des flux de réalimentation intercouches par rapport aux flux intracouches ( $\alpha < 1$ ), alors  $k$  diminue en valeur absolue, ce qui signifie que l'exponentielle s'atténue moins vite en fonction de la distance: la portée de l'effet de bord augmente, c'est à dire que **la largeur effective de la bande de localisation augmente**;
- au contraire à friction plus forte, ou moindre désordre, ou si les flux de réalimentation intracouches prédominent par rapport aux flux intercouches, alors  $k$  augmente en valeur absolue, et la portée de l'effet de bord, c'est à dire la largeur effective de la bande de localisation, diminue.

Enfin, si nous rapprochons (4.6 a) de la valeur trouvée pour les mesures de Nemat-Nasser et Okada, nous pouvons, avec les valeurs-type utilisée plus haut, évaluer l'ordre de grandeur de la dimension matérielle caractéristique  $D_c$  du processus énergétique, pour le milieu utilisé par ces expérimentateurs (sable Monterey N°0 à granulométrie étroite, diamètre moyen des grains 0,48mm), nous trouvons ici :

$$D_c \approx 2,4 \text{ mm} , \text{ de l'ordre de 5 fois le diamètre moyen des grains } \bar{d}$$

Ce résultat, pour le cas de milieux à granulométrie étroite, complète l'expression du coefficient matériel  $k$  donnée par la relation (4.6 a):

$$k \approx \frac{-1}{5\bar{d}} \text{Ln} 2 \left\{ \frac{(1+\alpha)}{R} \frac{(1+\sin \psi)}{(1-\sin \psi)} - \alpha \right\} \quad (4.6 \text{ b})$$

soit, avec les valeurs type utilisées ici:  $k \approx 0,77 / \bar{d}$  en  $m^{-1}$ .

#### 4.2.5 Largeur effective des bandes de localisation

L'expression du taux de dissipation donnée par la relation (4.5), et celle du coefficient matériel  $k$  trouvée précédemment permettent alors de définir la largeur effective des bandes de localisation, comme la largeur dans laquelle est concentrée X% de la dissipation totale.

Considérons donc une telle bande de localisation formée par deux profils, symétriques par rapport à l'axe des maxima, définis par la relation (4.5):

- pour une largeur  $L$ , le taux de concentration de la dissipation vaut

$$\frac{\int_0^{L/2} \dot{\omega}(x) dx}{\int_0^{\infty} \dot{\omega}(x) dx} = 1 - e^{-kL/2};$$

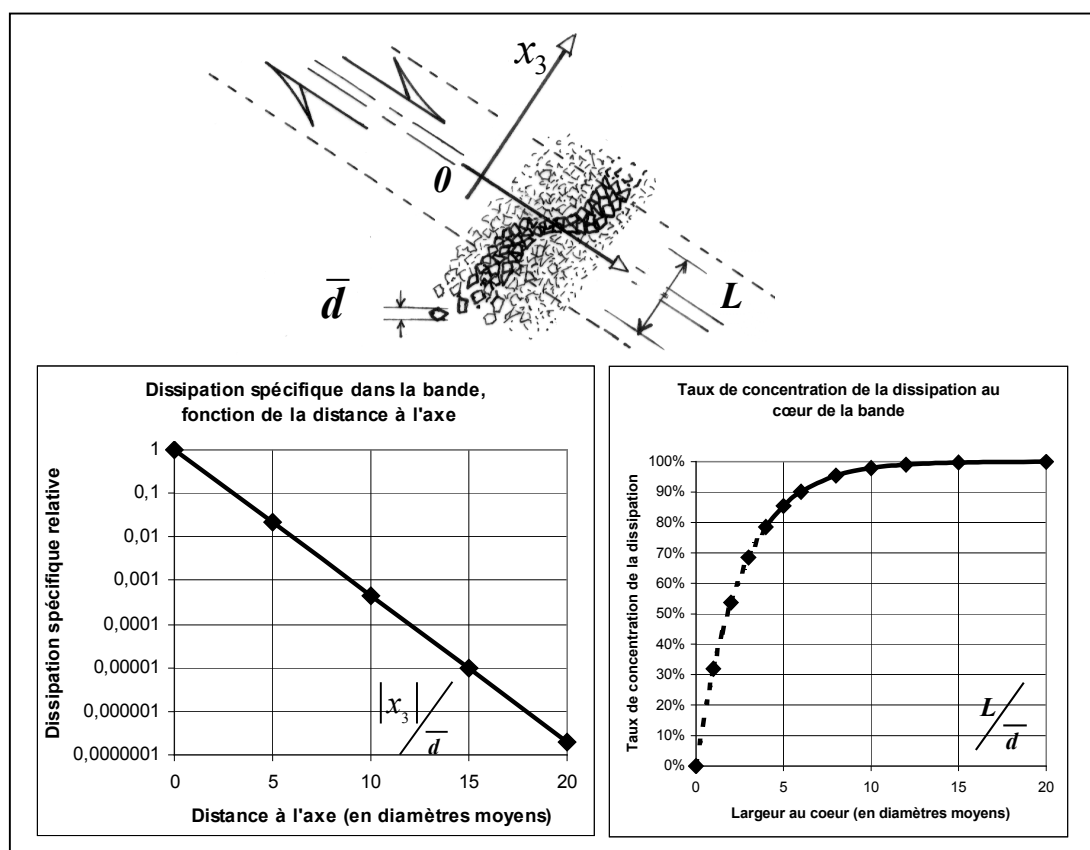
- compte tenu de l'expression de  $k$  trouvée plus haut, et des valeurs type des paramètres matériels, nous obtenons le tableau suivant

Largeur $L$	$4\bar{d}$	$5\bar{d}$	$6\bar{d}$	$8\bar{d}$	$10\bar{d}$	$12\bar{d}$	$15\bar{d}$	$20\bar{d}$
Concentration en Dissipation %	78,6	85,4	90,0	95,4	97,9	<b>99,0</b>	99,7	99,95

Définissant alors comme largeur effective de bande celle qui concentre 99% de la dissipation attachée à la structure de localisation, il s'ensuit que pour des milieux granulaires à granulométrie étroite:

**La largeur effective de la bande de localisation est de l'ordre de 12 fois le diamètre moyen des granules**

Ce résultat est conforme aux observations publiées dans la littérature (voir [8] et [9] par exemple). La figure 4-6 résume l'ensemble des résultats décrits dans les sections 4.2.4 et 4.2.5.



**Figure 4-6 -Micromécanisme énergétique : structure dissipative dans la bande stationnaire**

### 4.3 CONSEQUENCES SUR LE DEVELOPPEMENT DES BANDES DE LOCALISATION

#### 4.3.1 Bornes du développement d'une bande de localisation

Les structures mises en évidence précédemment, ont des implications directes sur le schéma de développement d'une bande de localisation, nous allons voir en particulier qu'elles bornent le taux de cisaillement *maximal*, dans l'axe de la bande, relativement au taux de cisaillement *moyen* sur le domaine.

Considérons donc un domaine soumis à une sollicitation monotone, en cisaillement simple, à partir d'un mouvement initial quasi-homogène, dans l'axe duquel se développe une bande de localisation dont nous suivons l'évolution dans le temps, Figure 4-7.

A partir de l'équation (4.3), le taux de cisaillement moyen dans le domaine à un instant donné, s'obtient par intégration sur la coordonnée  $x_3$  :

$$\bar{\dot{\gamma}}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{\gamma}(x_3, t) dx_3 = 2 [\dot{\gamma}_{Max}(t) - \dot{\gamma}_l(t)] \cdot \left[ \frac{1 - \exp(-\frac{kL}{2})}{kL} \right] + \dot{\gamma}_l(t)$$

Notons que du fait de l'absence de mouvement à contre-sens dans le domaine (voir section 2.1) les taux de cisaillements  $\dot{\gamma}_{Max}(t), \dot{\gamma}_l(t)$  sont du même signe que  $\bar{\dot{\gamma}}(t)$  :

$$\left( \frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)_{(t)} \text{ et } \left( \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)_{(t)} \geq 0$$

Lorsque  $\frac{kL}{2}$  est grand devant 1, c'est à dire en prenant  $L$  suffisamment grand, l'identité précédente devient, en rapportant tous les taux de cisaillement à la moyenne :

$$\left( \frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)_{(t)} + \left( \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)_{(t)} \cdot \left( \frac{kL}{2} - 1 \right) \approx \frac{kL}{2}$$

Il s'ensuit que l'amplification maximale dans l'axe de la bande de localisation s'obtient lorsque le champ homogène dans lequel se développe la bande, devient nul

$\left( \frac{\dot{\gamma}_l}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)_{(t)} \approx 0$  (ou autrement dit lorsque le mouvement se concentre exclusivement dans la bande, en "s'éteignant" en dehors de la bande), et

***l'amplification maximale dans l'axe de la bande*** vaut :

$$Max \left\{ \left( \frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\bar{\dot{\gamma}}} \right)_{(t)} \right\} \approx \frac{kL}{2} \quad (4.7)$$

Ces éléments permettent de construire la Figure 4-7, qui schématise ces bornes au développement et à la concentration d'une bande de localisation.

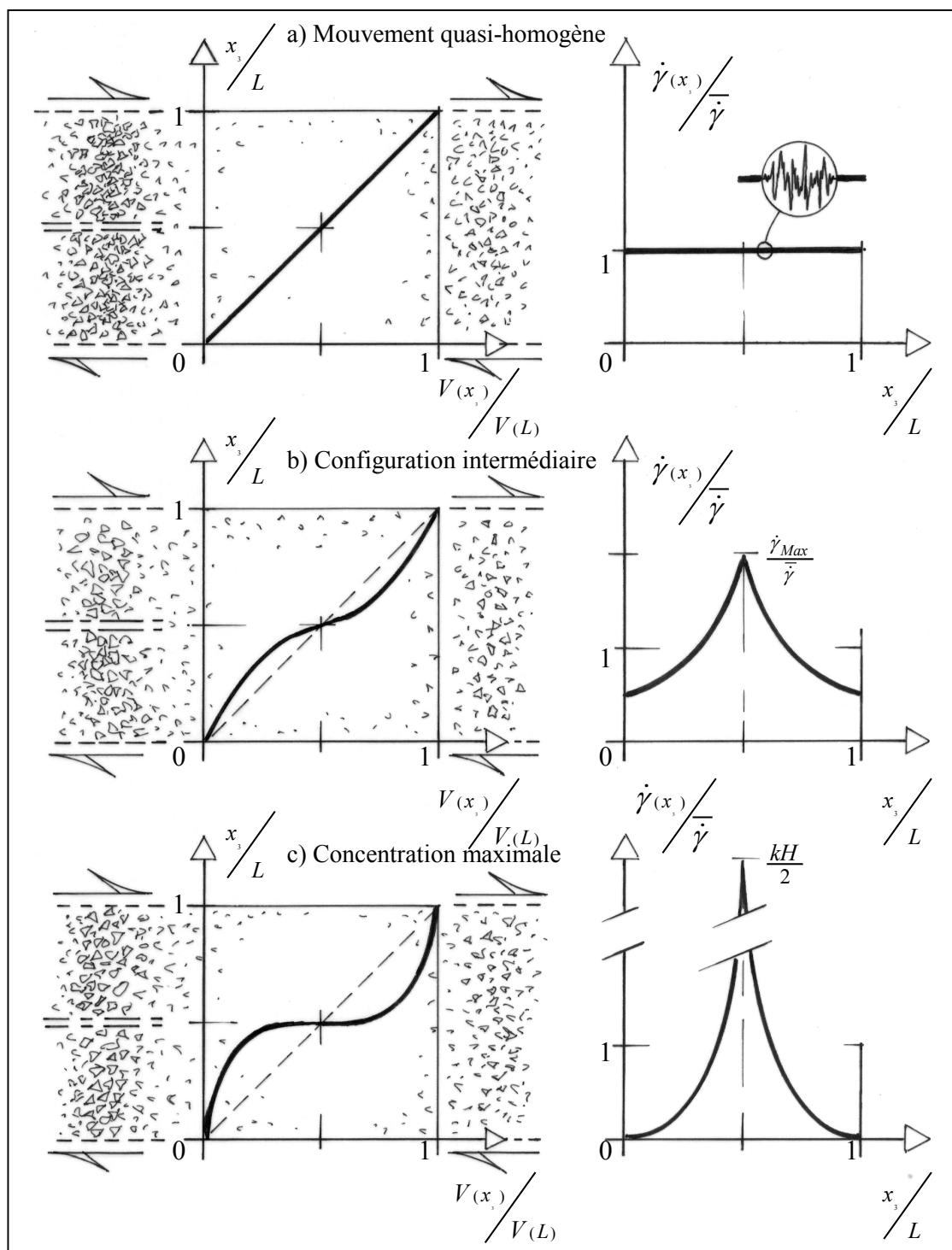
Enfin, le facteur d'amplification prévu par (4.7) peut être comparé aux résultats expérimentaux de Nemat-Nasser et Okada [9] sur des corps d'épreuve en cylindre

creux de 0,25 m de hauteur: compte tenu de la valeur de  $k$  trouvée plus haut (section 4.1.4), le facteur d'amplification maximal pour ces expériences serait d'**environ 200**, largement au dessus du facteur d'amplification de 57 mesuré par ces expérimentateurs, pour une déformation moyenne limitée à 10%, il est vrai.

**Figure 4-7 Bornes au développement d'une bande de localisation stationnaire**

Répartitions des vitesses

Profils des taux de cisailement



Nous montrerons au Chapitre 7 que sous conditions de sollicitation monotones, l'évolution d'une bande de localisation se fait irréversiblement depuis la situation a) vers la situation c).



Plus largement, rapprochant (4.7) de (4.6 b), nous trouvons que, pour un milieu donné, le facteur maximal d'amplification est proportionnel au rapport  $\frac{L}{d}$ . Pour des milieux granulaires du type Monterey N°0, ce facteur maximal d'amplification est donné par  $Max \left\{ \left( \frac{\dot{\gamma}_{Max}}{\dot{\gamma}} \right) \right\} \approx 0,38 \cdot \frac{L}{d}$ .

### 4.3.2 Coexistence de plusieurs bandes parallèles

Les résultats expérimentaux publiés montrent fréquemment la présence, durant certaines phases du mouvement, de plusieurs bandes de localisation parallèles, actives simultanément. Cette observation pose la question de la pertinence du schéma proposé ici, vis à vis de systèmes de bandes parallèles.

Observons d'abord qu'un système de bandes parallèles peut être envisagé comme une juxtaposition d'"interbandes", c'est à dire les zones comprises entre deux lignes de maxima du taux de cisaillement.

Remarquons ensuite que dans un tel interbande, d'après la structure trouvée précédemment, se croisent **deux effets de bord en sens inverse**.

Or nous avons vu que les solutions complètes de l'équation (4.4), donnant la structure de dissipation en bord de bande par simple réalimentation interne, sont en fait combinaisons linéaires de deux solutions exponentielles **de raison inverse**.

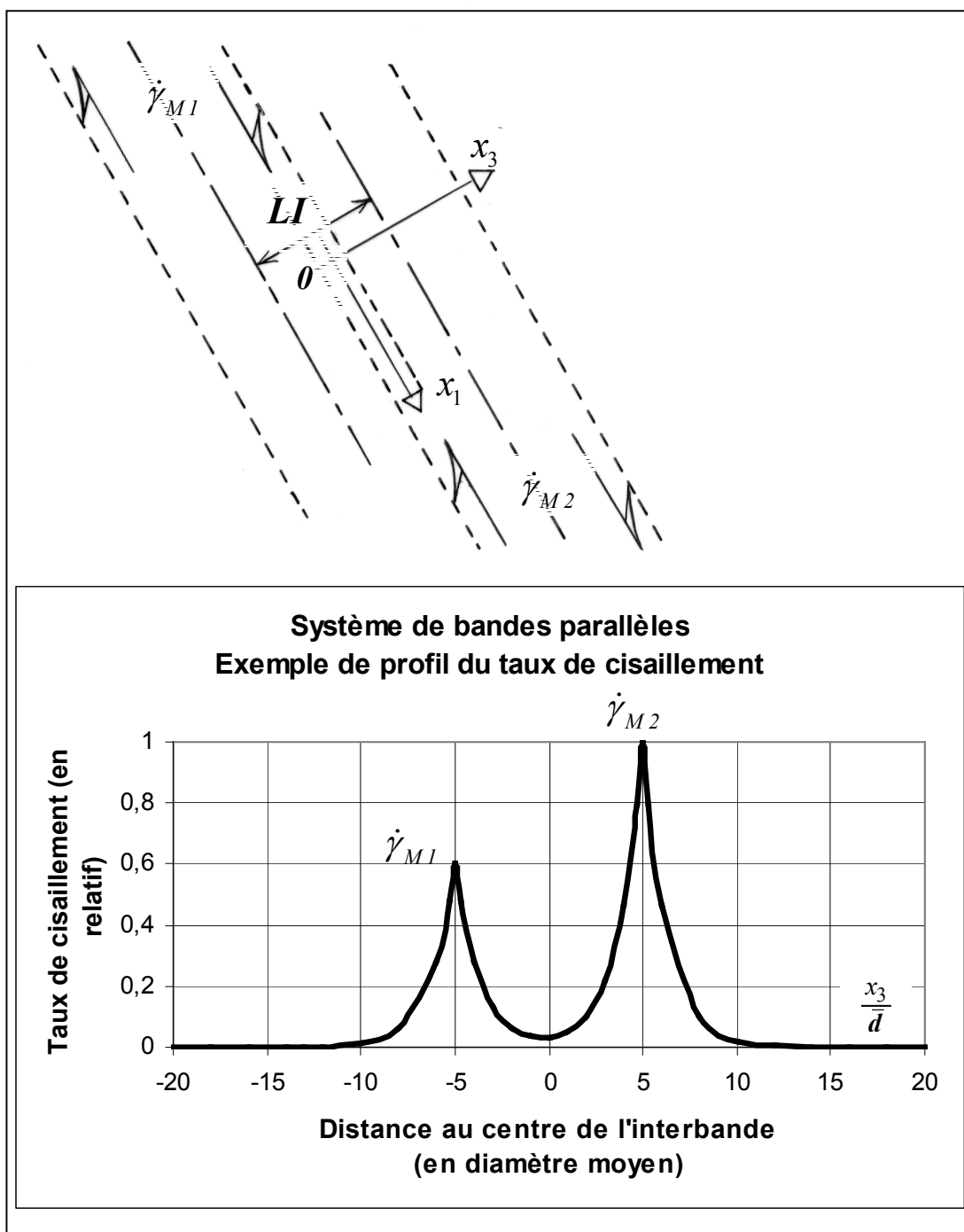
Ces solutions complètes de l'équation (4.4), et leur forme continue, s'interprètent donc tout naturellement, en première approximation, comme des structures d'interbande, où se croisent deux effets de bord en sens contraire.

Notant  $\dot{\gamma}_{M1}$  et  $\dot{\gamma}_{M2}$  les deux maxima du taux de cisaillement qui encadrent l'interbande de largeur  $LI$ , repéré à partir de son milieu –Figure 4-8-, le profil correspondant du taux de cisaillement s'obtient sans difficulté particulière:

$$\dot{\gamma}(x_3) = Ae^{-kx_3} + Be^{kx_3} \text{ avec } \begin{cases} A = \frac{\dot{\gamma}_{M1} \cdot e^{k \frac{LI}{2}} - \dot{\gamma}_{M2} \cdot e^{-k \frac{LI}{2}}}{e^{kLI} - e^{-kLI}} \\ B = \frac{\dot{\gamma}_{M2} \cdot e^{k \frac{LI}{2}} - \dot{\gamma}_{M1} \cdot e^{-k \frac{LI}{2}}}{e^{kLI} - e^{-kLI}} \end{cases}$$

La Figure 4-8 détaille le cas de deux bandes d'intensité inégale, dans un champ homogène nul.



**Figure 4-8 Bandes parallèles en interaction**

## 5 STRUCTURES INTERNES DES CHAÎNONS DE CONTRAINTES

Dans ce Chapitre, nous aborderons les structures d'hétérogénéités en contraintes, où nous verrons apparaître les chaînons de contraintes comme une famille remarquable de solutions de la condition d'équilibre.

Nous montrerons qu'à l'échelle macroscopique, leur structure transversale peut développer une structure statique stationnaire, analogue à la structure cinématique trouvée pour les bandes de cisaillement.

Toutefois nous verrons que cette analogie ne s'exerce pas à la même échelle, l'existence d'un Critère de Rupture macroscopique limitant fortement l'apparition de tels chaînons de contraintes à l'échelle macroscopique, et les confinant plutôt à l'échelle microscopique.

Venant de détailler la structure interne des bandes de localisation, ainsi que le processus physique sous-jacent, au Chapitre 3, nous pouvons nous demander si une structure interne analogue n'existerait pas aussi dans les chaînons de contraintes.

Toutefois, rappelons qu'une condition physique forte (qui n'a pas d'équivalent sur les mouvements intérieurs) encadre les gradients d'efforts intérieurs, c'est la **condition d'équilibre statique**, qui doit être satisfaite pour les mouvements lents que nous considérons ici. Pour simplifier, nous négligerons dans ce qui suit l'effet d'éventuelles forces extérieures réparties dans le volume (telles que la pesanteur).

### 5.1 ROLE DE LA CONDITION D'ÉQUILIBRE STATIQUE

Observons d'abord que cette condition interdit le développement de chaînons de contraintes de structure directement analogue à celle des bandes de localisation stationnaires trouvée précédemment, dont le champ de tenseurs locaux des vitesses de déformations varie avec les coordonnées tout en demeurant homothétique au tenseur moyen, de la forme :

$$\underline{\dot{\epsilon}}_{(M,D)} = \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(D)} \cdot [1 + \eta_0(M)] \text{ avec } \int_D \eta_0(M) dv = 0 .$$

En effet, si un champ de contraintes de forme analogue se développe dans le domaine, de type  $\underline{\sigma}_{(M,D)} = \overline{\underline{\sigma}}_{(D)} \cdot [1 + \zeta_0(M)]$  avec  $\int_D \zeta_0(M) dv = 0$ , alors la condition d'équilibre

$\overline{Div\{\underline{\sigma}_{(M,D)}\}} = 0$  devient  $\overline{\underline{\sigma}}_{(D)} \cdot \overline{Grad\{\zeta_0(M)\}} = 0$ . Comme en général le tenseur des contraintes moyennes est régulier (sauf localement près d'une surface libre), il s'ensuit que la seule solution de ce type est en général  $\overline{Grad\{\zeta_0(M)\}} = 0$ .

Autrement dit, la seule solution de ce type autorisée en général par la condition d'équilibre, est  $\zeta_0(M) = Cte = 0$  c'est à dire  $\underline{\sigma}_{(M,D)} = \overline{\underline{\sigma}}_{(D)}$ , **un tel champ de contraintes est nécessairement constant sur le domaine.**

Pour analyser la structure éventuelle des chaînons de contraintes, il est donc nécessaire de rentrer dans les propriétés spécifiques des solutions de la condition d'équilibre.

## 5.2 SOLUTIONS PARTICULIÈRES REMARQUABLES DE LA CONDITION D'ÉQUILIBRE

Dans un référentiel quelconque  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , l'écriture classique des conditions d'équilibre

$$\text{est équivalente au système } \begin{cases} \text{Div}\{\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}\} = 0 \\ \text{Div}\{\overrightarrow{\sigma_{(\vec{j})}}\} = 0 \\ \text{Div}\{\overrightarrow{\sigma_{(\vec{k})}}\} = 0 \end{cases}$$

c'est à dire que les champs de vecteurs contraintes  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}, \overrightarrow{\sigma_{(\vec{j})}}, \overrightarrow{\sigma_{(\vec{k})}}$  forment un **système de 3 champs conservatifs** définis en tout point.

Dans un tel champ conservatif, par exemple  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$ , une surface tubulaire formée par un ensemble de lignes de champ définit donc un **tube de forces**, dont l'intensité, c'est à dire la résultante de  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$  sur la section du tube, demeure constante le long du tube.

Dans une coupe transversale aux lignes de champ, rien n'interdit la variation transversale de  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$ , l'intensité de  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$  dans une coupe transversale, présentera donc en général des *maxima et des minima*. Le champ étant conservatif, ces maxima et minima se correspondent d'une coupe transversale à une autre coupe voisine, suivant les lignes de champ (tant que la courbure des lignes de champ demeure limitée).

Autrement dit, dans un sous-domaine où les lignes de champ demeurent approximativement parallèles, le champ de vecteurs contrainte  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$ , solution de la condition d'équilibre, peut être représenté par un ensemble de tubes de forces, parallèles, axés sur les lignes de maxima de  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$ , ces tubes étant séparés par des zones de minima de  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$ , Figure 5-1. Dans une telle représentation, un choix convenable des tubes de force entourant les lignes de maxima, permet en outre de faire en sorte que cet ensemble de tubes de forces conduise l'essentiel de l'intensité du champ de contraintes  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$  dans le domaine. Observons qu'une telle représentation correspond précisément à la notion de **chaînons de contraintes**.

Le raisonnement étant valide aussi bien pour  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}$ , que pour  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{j})}}$  ou  $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{k})}}$ , nous obtenons donc comme

**solution particulière remarquable des conditions d'équilibre:**  
**un triple réseau de chaînons de contraintes respectivement parallèles à**  
 $\overrightarrow{\sigma_{(\vec{i})}}, \overrightarrow{\sigma_{(\vec{j})}}, \overrightarrow{\sigma_{(\vec{k})}}$ .

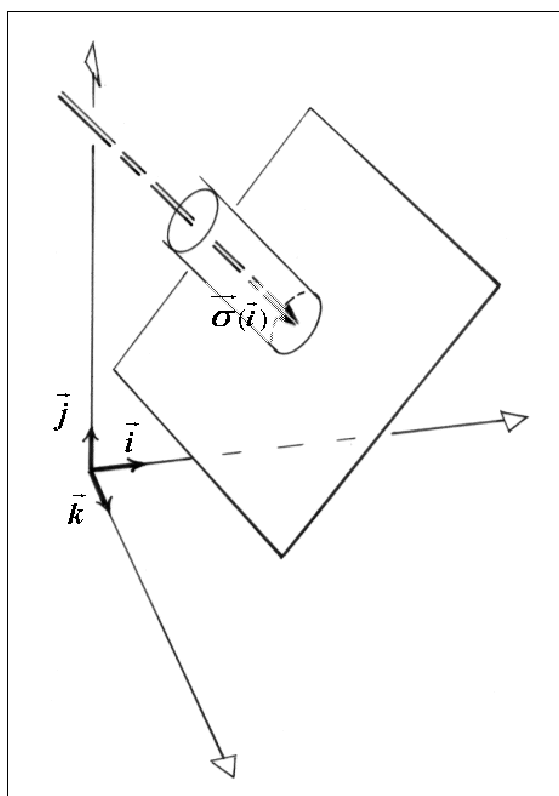


Figure 5-1

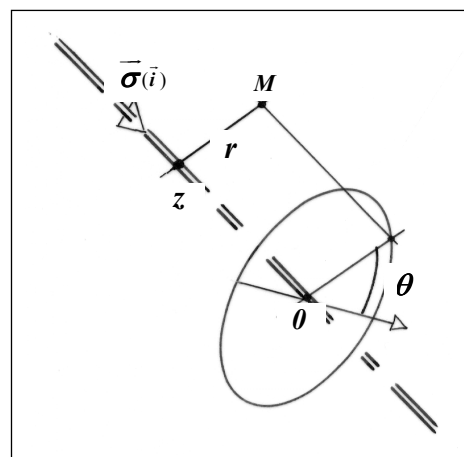


Figure 5-2

Cette propriété étant valide dans tout référentiel  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , nous pourrions en principe observer, dans un domaine donné, des systèmes de chaîons de contraintes distribués dans toutes les directions de l'espace. L'intensité d'un système de chaîons devant représenter l'intensité du vecteur contrainte correspondant, le système de chaîons de plus forte intensité correspondra donc à la contrainte principale majeure, le système de chaîons le plus faible correspondant à la contrainte principale mineure.

### 5.3 STRUCTURE TRANSVERSALE DES CHAÎONS DE CONTRAINTES MACROSCOPIQUES

Considérons un chaînon de contraintes, que nous supposons rectiligne pour simplifier, et repérons l'espace environnant par un système de coordonnées cylindriques, dont l'axe est celui du chaînon (ligne des maxima en contrainte, parallèle au vecteur contrainte considéré) Figure 5-2. Dans ce référentiel, la condition d'équilibre fait que la contrainte considérée est indépendante de la coordonnée  $z$  le long de l'axe.

Dans une section transversale au chaînon de contrainte, nous pouvons reprendre le raisonnement de la section 4.1.2, en traitant cette fois des efforts intérieurs, en fonction des efforts extérieurs  $\{\mathbf{F}_E\}$ .

En développant une approche analogue à celle effectuée sections 4.1.2 et 4.1.3 pour les taux de cisaillement, nous obtiendrons ici une **équation statique de structure stationnaire dans le chaînon de contrainte macroscopique**:

$$\frac{\overline{\text{Grad}(\sigma)}}{\sigma} = \bar{g}(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial r} [Ln(\sigma)] \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [Ln(\sigma)] \cdot \vec{u}_\theta \quad (5.1).$$

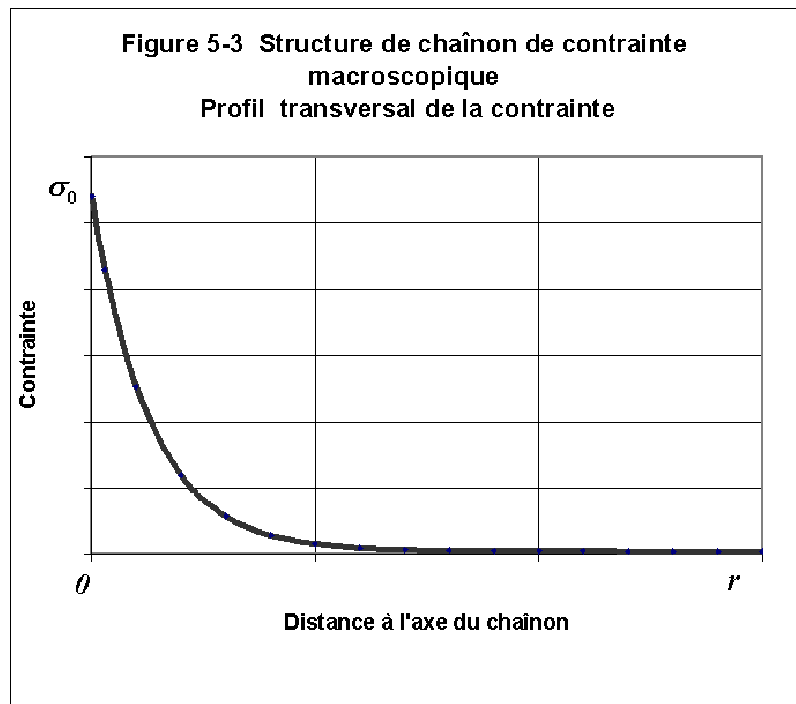
La solution complètement stationnaire qui satisfait à la condition de maximum pour  $r=0$  en est ici:  $\vec{g}(r, \theta) = -k' \vec{u}_r$ .

Nous en tirons une variation transversale de l'intensité de la contrainte, qui décroît vers les bords du chaînon, exponentiellement avec la distance à l'axe des maxima

$$\sigma(r, \theta, z) = \sigma_0 \cdot e^{-k'r} \quad (5.2)$$

Figure 5-3.

En raisonnant sur le chaînon placé dans un champ de déformations homogènes, nous pourrions résoudre en coordonnées cylindriques, la diffusion de la dissipation d'énergie par réalimentation interne, par un raisonnement analogue à celui de la section 4.2, et obtenir l'expression du coefficient  $k'$  en fonction des paramètres matériels. Toutefois, ce qui suit limite fortement l'intérêt d'un tel exercice.



## 5.4 LIMITATIONS MACROSCOPIQUES DUES AU CRITÈRE DE RUPTURE

Dans un domaine soumis à trois systèmes de chaînons de contraintes, que nous considérons ici pour simplifier parallèles aux directions de contraintes principales, les trois systèmes de chaînons constituent trois ensembles de lignes (ici de directions orthogonales) entrecroisées dans l'espace. Dans une telle configuration, la probabilité de trouver un croisement entre un chaînon sur  $\sigma_1$  et une zone de minimum sur  $\sigma_3$ , est loin d'être nulle. Au voisinage d'un tel croisement, le rapport entre le maximum local de  $\sigma_1$ , contrainte principale majeure, et le minimum local de  $\sigma_3$ , contrainte principale mineure, pourrait être en principe aussi grand que l'on veut.

Or, les milieux granulaires que nous considérons présentent la propriété générale de satisfaire à un Critère de Rupture : tant que les mouvements intérieurs se font dans un voisinage des conditions d'équilibre statique, le rapport entre les contraintes principales majeures et mineures à l'échelle macroscopique, est borné en valeur supérieure. C'est à dire qu'il doit demeurer *-dans tout le domaine en*

*mouvement-* en deçà d'une certaine limite :  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \leq CR_{Max}$ , dont l'ordre de grandeur est usuellement inférieur à 10.

De manière plus générale, un raisonnement sur la représentation du tenseur des contraintes par les cercles de Mohr, Figure 5-4, montre que cette limitation fait aussi que, pour tout référentiel orthonormé  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , les vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_{(\vec{i})}, \vec{\sigma}_{(\vec{j})}, \vec{\sigma}_{(\vec{k})}$

vérifient:

$$\frac{\text{Sup}\left\{\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{i})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{j})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{k})}\right\|\right\}}{\text{Inf}\left\{\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{i})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{j})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{k})}\right\|\right\}} \leq CR_{Max}$$

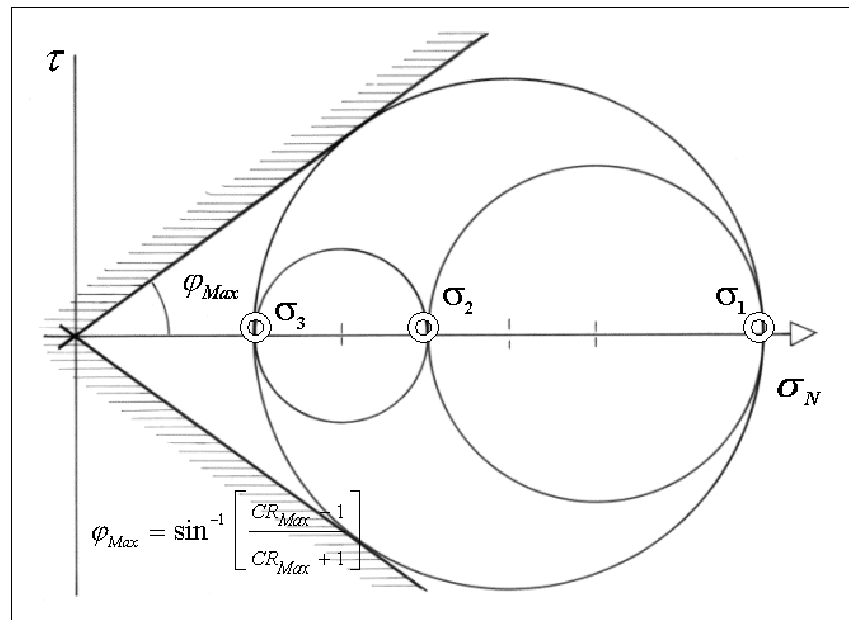
Cette condition devant être vérifiée sur tout le domaine en mouvement, s'écrit donc:

$$(5.3) \quad \boxed{\text{pour tout référentiel } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad \text{Max}_{(\mathbf{D})} \left[ \frac{\text{Sup}\left\{\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{i})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{j})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{k})}\right\|\right\}}{\text{Inf}\left\{\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{i})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{j})}\right\|,\left\|\vec{\sigma}_{(\vec{k})}\right\|\right\}} \right] \leq CR_{Max}}$$

Si nous évaluons la même fonction, mais cette fois sur les vitesses de déformations au lieu des contraintes, nous trouverons que sa valeur peut être aussi grande que l'on voudra, car aucune limitation ne bride le développement de l'hétérogénéité en déformation (*hors celles imposées par les conditions aux limites..*), comme le font les conditions d'équilibre et le Critère de Rupture pour les contraintes.

**Figure 5-4**

Cette condition (5.3) limite fortement les hétérogénéités macroscopiques en contraintes, car à l'échelle macroscopique, l'intensité des chaînons de contraintes ne pourra se développer, sans violer ici et là dans le domaine le Critère de Rupture, entraînant des ruptures locales, et par contrecoup des réajustements locaux des



contraintes (et donc des chaînons correspondants), jusqu'à satisfaire le Critère de Rupture.

A plus petite échelle, cette limitation du Critère de Rupture disparaît, car le Critère de Rupture est une notion macroscopique d'ordre statistique.

**En conclusion, si les chaînons de contraintes peuvent se développer pleinement à petite échelle, c'est à dire à l'échelle microscopique, le Critère de Rupture, à l'échelle macroscopique, écrête les contrastes d'intensité entre chaînons de contraintes.**

**Sous conditions aux limites régulières, d'éventuels chaînons de contraintes macroscopiques seront donc généralement des structures faibles, comparés aux chaînons microscopiques.**

## **5.5 CONTRASTES D'ECHELLES ENTRE BANDES DE LOCALISATION ET CHÂÎNONS DE CONTRAINTES**

Dans les développements présentés dans les Chapitres 4 et 5, nous avons raisonné sur des gradients de cisaillement sous contrainte homogène (sections 4.1 et 4.2) d'une part, et d'autre part sur des gradients de contraintes sous taux de déformation homogène (section 5.4).

En présence simultanée de bandes de cisaillement et de chaînons de contraintes, un tel mode de raisonnement serait incorrect, si les limitations apportées aux chaînons de contraintes par le Critère de Rupture, ne les maintenaient à une échelle plus ou moins microscopique. Par ailleurs rien ne limite le développement de bandes de cisaillement à l'échelle macroscopique (hormis les conditions aux limites...).

Cette observation dénote un contraste d'échelle, qui peut être précisé en ordres de grandeurs, pour des milieux à granulométrie étroite:

- nous avons vu que la largeur effective d'une bande de localisation est de l'ordre de  $12\bar{d}$  ;
- puisque le Critère de Rupture maintient les chaînons forts de contraintes à l'échelle microscopique, celle des contacts intergranulaires, la largeur effective d'un chaînon fort est donc de l'ordre de  $\bar{d}$  ;
- à partir de ce contraste d'échelles en termes de largeur effective, s'obtiennent les contrastes en terme de section transverse représentative et en termes de volume élémentaire représentatif:

	Largeur effective	Section représentative	Volume représentatif
Grandeur Bande	12	140	1700
:	:	:	:
Grandeur Chaînon	1	1	1

Ce contraste d'échelles fait qu'à l'échelle macroscopique, les chaînons de contrainte microscopiques affectant le voisinage de gradients de cisaillement dans les bandes de localisation, pourront effectivement être représentés par des contraintes moyennes.



## 5.6 INCIDENCES SUR LA COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE SIMULTANEE EN CONTRAINTES ET EN DEFORMATIONS

Montrons ici que ce contraste d'échelles, entre bandes de cisaillement et chaînons de contraintes, constitue une cause physique vraisemblable aux conditions d'indépendance entre hétérogénéités en déformations et hétérogénéités en contraintes, trouvées en Section 2.2.

Revenons d'abord sur le schéma d'hétérogénéités simultanées analysé antérieurement dans le cas coaxial à repère propre fixe (Chapitre 2, section 2.1.3) et reprenons terme à terme - sans poser aucune condition d'indépendance a priori - nous observons que:

-a) la condition d'équilibre statique exclut que les termes d'hétérogénéité en contraintes soient à dominante "isotrope", représenté par une fonction  $\zeta_0(M)$ , comme nous l'avons vu plus haut (section 5.1)  $\zeta_0(M) = Cte = 0$ . Il s'ensuit que le terme

$\zeta_0(M)$ , est un terme secondaire devant les autres, et donc que les conditions d'indépendance des équations (1.10), de type  $\int_D \eta_i(M) \zeta_0(M) dv = 0$ , se trouvent vérifiées,

au moins approximativement, ainsi que la condition  $\int_D \eta_0(M) \zeta_0(M) dv = 0$ , dont nous avons vu (Chapitre 2- section 2.2.1) qu'elle était une condition nécessaire à la *Condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel*;

-b) le contraste d'échelles résultant du Critère de Rupture, limite fortement les hétérogénéités macroscopiques en contraintes, et les confine à l'échelle microscopique, alors que les hétérogénéités macroscopiques en déformations peuvent être aussi grandes que l'on voudra;

-c) en conséquence, si nous choisissons un *volume élémentaire représentatif* suffisamment grand pour définir les contraintes et vitesses de déformation macroscopiques, les seules hétérogénéités significatives qui subsistent sont celles des bandes de localisation;

-d) les fluctuations locales en contraintes pouvant éventuellement subsister à une telle échelle, constituent des structures faibles comparativement à celles des déformations, et de nature différente (au sens des définitions de la section 2.1.3) car ces fluctuations sont à dominante "anisotrope" pour les contraintes, avec comme conséquence de la condition (5.3), la limitation qu'en tout point  $M$  du domaine en mouvement:

$$\frac{1 + \zeta_i(M)}{1 + \zeta_j(M)} \leq CR_{Max} \cdot \frac{\overline{\sigma_j(D)}}{\overline{\sigma_i(D)}} \text{ pour tout } i \neq j \in \{1, 2, 3\}, \text{ et donc au voisinage}$$

d'une "rupture", lorsque  $CR_{Max} \cdot \frac{\overline{\sigma_j(D)}}{\overline{\sigma_i(D)}} \approx 1$ , cette condition implique  $\frac{1 + \zeta_i(M)}{1 + \zeta_j(M)} \approx 1$ ,

ce qui lamine les hétérogénéités en contraintes;

-e) une structure d'hétérogénéité forte, à dominante de type "isotrope" pour les bandes de localisation, ce qui signifie que le terme en  $\eta_0(M)$  prédomine largement par rapport aux termes  $\eta_i(M)$ ;

-f) pour une telle structure d'hétérogénéité combinée, avec un terme prépondérant en  $\eta_0(M)$  pour les déformations, et des termes prépondérants mais faibles en  $\zeta_i(M)$  sur

les contraintes, l'équation de la dissipation minimale étant supposée vérifiée "localement" (*c'est à dire dans tout volume élémentaire représentatif*), on montre alors en reprenant l'analyse de l'Annexe 2-2, qu'elle se trouve aussi vérifiée par les valeurs moyennes des contraintes et vitesses de déformation sur le domaine en mouvement, à la seule condition que pour tout  $i \int_D \eta_0(M) \cdot \zeta_i(M) dv = 0$ ; les autres relations d'indépendance nécessaires entre les hétérogénéités en contraintes et en déformations, se trouvent déjà assurées simplement par les conditions particulières des formes d'hétérogénéité trouvées aux Chapitres 4 et 5;

-g) ce qui précède montre qu'il s'agit d'une condition faible, car les hétérogénéités sur les  $\zeta_i(M)$  (contraintes) sont faibles par rapport aux hétérogénéités sur  $\eta_0(M)$  (déformations), et de ce fait les termes de *covariance*  $\int_D \eta_0(M) \cdot \zeta_i(M) dv$  sont des termes faibles.

Revenons ensuite sur l'analyse de l'hétérogénéité simultanée dans le cas général (chapitre 2, section 2.2), en choisissant un *volume élémentaire représentatif* suffisamment grand pour définir les contraintes et vitesses de déformation macroscopiques, de manière à ce que les seules hétérogénéités significatives qui subsistent soient celles des bandes de localisation:

-h) la *différence* entre le tenseur produit des valeurs moyennes  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  et le tenseur formé par la moyenne des produits  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  étant précisément un *tenseur formé par ces termes de covariance*  $\overline{\pi(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}})}$  (section 2.2), il s'ensuit d'après le point g) ci-dessus, que les deux tenseurs  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  et  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  sont au moins voisins, à une telle échelle macroscopique;

-i) l'équation de dissipation de l'Approche énergétique étant toujours vérifiée par le tenseur  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  (voir Annexe 1.1), le sera donc aussi par le tenseur  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$ , au moins avec une bonne approximation;

-j) de plus, si à une telle échelle macroscopique les deux tenseurs  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  et  $\overline{\pi(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}})}$  sont au moins voisins, voire égaux, il en résulte que la condition vérifiée par le milieu serait plutôt la condition suffisante  $\overline{\pi(\underline{\tilde{\sigma}}, \underline{\tilde{\dot{\epsilon}}})} = 0$ , que la condition nécessaire et suffisante détaillée au Chapitre 2, section 2.2.1.