

1. COMPATIBILITE DE L'APPROCHE ENERGETIQUE AVEC L'HETEROGENEITE DES ACTIONS INTERIEURES– RELATIONS ENTRE PROPRIETES LOCALES ET PROPRIETES MOYENNES

Dans ce qui suit, nous nous appuierons sur les résultats établis par l'Approche Energétique, dont les notions et résultats essentiels sont rappelés en Annexe 1-1. Nous analyserons le comportement de milieux granulaires sans cohésion (seule intervient la friction physique moyenne ψ entre granulats) en mouvement, et sauf indication contraire (section 1.1.2), dans des conditions proches de la dissipation minimale. Dans ce cadre deux conditions physiques s'avèrent jouer un rôle clé:

- la condition de **signature de Mode**, qui porte sur les actions intérieures, propriété attachée aux Modes de la dissipation minimale, et qui fait que dans un domaine proche de la dissipation minimale, la signature du tenseur des actions intérieures demeure la même, localement ou globalement, et correspond, soit au Mode I, de signature (+,-,-), soit au Mode II, de signature (+,+,-), soit au Mode frontière en déformation plane, de signature (+,0,-);
- la condition de **non-traction**, qui porte sur les contraintes, propriété essentielle des milieux granulaires sans cohésion usuels, dans lesquels les forces intergranulaires locales ou les contraintes macroscopiques équivalentes, présentent des composantes normales qui sont toujours en compression.

Dans cette section, nous analyserons principalement les conditions physiques particulières sur l'hétérogénéité des actions intérieures, résultant des propriétés spécifiques des mouvements en dissipation minimale, trouvées par l'Approche Energétique. Celle-ci a montré que ces propriétés spécifiques résultent essentiellement d'une polarisation spontanée des actions intérieures, au cours du mouvement dans le milieu discontinu, lorsqu'il se rapproche des conditions de la dissipation minimale. Une illustration de cette relation entre polarisation et dissipation minimale sera donnée en section 1.2, qui explore brièvement les situations hors dissipation minimale .

1.1 LE MILIEU DISCONTINU, AU VOISINAGE PROCHE DE LA DISSIPATION MINIMALE

1.1.1 Conditions physiques particulières

Dans un amas granulaire discontinu A , en mouvement dans un voisinage proche de la dissipation minimale, le tenseur des actions intérieures $\underline{\mathbf{P}}(A)$, vérifie l'équation de la dissipation minimale

$$Tr\{\underline{\mathbf{P}}(A)\} = \sin \psi . N_{\parallel} \{ \underline{\mathbf{P}}(A) \} \quad (1.1), \text{ et sa forme équivalente sur}$$

les puissances reçues et puissances rendues

$$(1 - \sin \psi) \mathbf{P}^+(A) = -(1 + \sin \psi) \mathbf{P}^-(A).$$

Cette propriété est également vérifiée sur tout sous-domaine de A , c'est la propriété de *similitude interne* attachée à la dissipation minimale, qui demeure valide jusqu'aux partitions ultimes de l'amas granulaire discontinu, celles qui individualisent chaque contact élémentaire.

En résumé, lorsqu'un amas granulaire est proche de la dissipation minimale, les tenseurs des actions de contact **élémentaires**, et le tenseur **global** sur **A** des actions intérieures, vérifient la même équation de dissipation d'énergie, ont au moins une direction propre commune, et ont la même signature. Cette propriété est déjà remarquable en elle-même, car rien ne garantit a priori qu'une relation constitutive étant vérifiée localement (aux contacts élémentaires), le sera également sur les valeurs globales; ce sont les spécificités des Modes de dissipation minimale qui assurent cette identité entre équation aux valeurs locales et équation aux valeurs globales.

Cette identité remarquable, résulte directement d'une propriété essentielle des Modes de dissipation minimale:

- pour ceux-ci, le tenseur des actions intérieures de l'amas granulaire $\underline{\mathbf{P}}(A)$, formé par la somme des tenseurs des actions de contact élémentaires $\underline{\mathbf{p}}(a/b)$, étendue à tous les $N(A)$ contacts rencontrés dans l'amas, vérifie la condition

$$N_{\square} \{ \underline{\mathbf{P}}(A) \} = N_{\parallel} \left\{ \sum_1^{N(A)} \underline{\mathbf{p}}^{(n)} \right\} = \sum_1^{N(A)} \left[N_{\parallel} \{ \underline{\mathbf{p}}^{(n)} \} \right] \quad (1.2) ;$$

- autrement dit (*en divisant par $N(A)$ les termes de l'égalité (1.2)*), **en dissipation minimale, la Norme de la moyenne des actions intérieures sur l'amas est égale à la moyenne des Normes des actions intérieures locales dans l'amas granulaire discontinu.**

1.1.2 Représentation de l'hétérogénéité admissible

Remarquons que cette propriété équivaut à relier de manière simple la distribution des actions intérieures locales, aux actions intérieures globales dans l'amas (nous classons les directions propres suivant les valeurs décroissantes des valeurs propres correspondantes):

- en Mode I, les tenseurs global et locaux ont pour direction propre commune la direction 1, qui porte l'unique valeur propre positive, et le caractère de distribution local peut être représenté par une fonction scalaire $\lambda_{(n)}$ qui relie les valeurs propres du tenseur local $\underline{\mathbf{p}}^{(n)}$, qui est toujours un tenseur plan, au contact $n^{\circ} n$ parmi tous les $N(A)$ contacts de l'amas, à celles du tenseur global $\underline{\mathbf{P}}(A)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_{1^{(n)}} = \frac{1}{N(A)} \cdot \mathbf{P}_1(A) \cdot (1 + \lambda_{(n)}) \quad \text{avec} \quad 0 \leq 1 + \lambda_{(n)} \quad \text{et} \quad \sum_1^{N(A)} \lambda_{(n)} = 0 \\ \mathbf{p}_{2^{(n)}} = 0 \\ \mathbf{p}_{3^{(n)}} = \frac{1}{N(A)} \cdot (\mathbf{P}_2(A) + \mathbf{P}_3(A)) \cdot (1 + \lambda_{(n)}) \end{array} \right.$$

- en Mode II, on trouve une configuration symétrique en permutant les rôles des directions propres 1 et 3;
- en Mode frontière en déformation plane ($\mathbf{P}_2(A) = \mathbf{p}_{2^{(n)}} = 0$), les trois directions propres sont communes, mais les relations ci-dessus demeurent valides

Les conditions ci-dessus relient la distribution des tenseurs locaux aux contacts

élémentaires $\underline{\mathbf{p}}(n)$, au tenseur moyen sur l'amas $\frac{1}{N(A)} \cdot \underline{\mathbf{P}}(A)$, par l'intermédiaire

d'une distribution discrète $\lambda_{(n)}$, à somme nulle, qui représente l'écart local, en valeur relative. Cette écriture est donc une représentation de l'hétérogénéité locale, pour le discontinu.

Les conditions ci-dessus sont donc les conditions de compatibilité cherchées, en ce qui concerne l'hétérogénéité des actions intérieures dans l'amas granulaire discontinu.

Observons que :

- ces conditions n'apportent pas d'information supplémentaires par rapport aux conditions physiques sur les actions intérieures, attachées à la dissipation minimale (signature de Mode, au moins une direction propre commune ..), elles en sont simplement la traduction, au niveau des hétérogénéités locales, sans apporter aucune nouvelle restriction. **Les actions intérieures du milieu granulaire discontinu, en mouvement proche de la dissipation minimale, sont donc naturellement compatibles avec l'hétérogénéité;**
- la condition de signature de mode interdit les changements de signe des valeurs propres, mais ne limite en rien l'amplitude des écarts locaux, en valeur absolue;
- rien ne limite non plus la concentration éventuelle des actions intérieures sur un sous-amas limité A_1 , avec $\lambda_{(n)} = -1$, partout à l'extérieur, c'est à dire une dissipation (et donc une "déformation") localisée, séparant des masses "gelées dans le mouvement";
- rien ne limite l'éventuelle structure géométrique de tels sous-amas de dissipation localisée.

1.2 MILIEU DISCONTINU AVEC REALIMENTATION INTERNE - DISTRIBUTIONS STATISTIQUES D'ACTIONS DE CONTACT-

Dans la section précédente, la fonction $1 + \lambda_{(n)}$ représente en fait la distribution statistique discrète des actions de contact locales, pour un mouvement au voisinage proche de la dissipation minimale. Cela incite à analyser la question de la compatibilité avec l'hétérogénéité sous un autre angle, à partir de ces distributions statistiques d'actions de contact d'une part, et d'autre part pour des mouvements correspondant à des voisinages plus larges de la dissipation minimale.

L'Approche Energétique montre que les mouvements généraux dans l'amas granulaire satisfont l'équation générale de dissipation:

$$Tr\{\underline{\mathbf{P}}(A)\} = \frac{\sin \psi}{1 - (1 - \sin \psi) \cdot R(A)} N_{\parallel} \{\underline{\mathbf{P}}(A)\} \quad (1.4)$$

Dans cette équation, $R(A)$ est une fonction scalaire, prenant ses valeurs entre 0 et +1, qui s'exprime en fonction d'invariants simples des tenseurs d'actions de contact, et qui représente un effet de population appelé "Réalimentation interne". Cet effet de

population rend compte de la part de désordre dans les mouvements intérieurs du milieu.

Si nous partons du tenseur global des actions intérieures de l'amas granulaire (*ce qui revient à partir du tenseur moyen*), vérifiant l'équation de dissipation (1.4), se posent alors deux questions :

- quelles conditions doit vérifier une distribution statistique de tenseurs d'actions locales de contact, pour que le tenseur global $\underline{\mathbf{P}}_{(A)}$ en soit la résultante ?
- peut-on en tirer des informations sur les propriétés spécifiques d'une telle distribution, et sa compatibilité avec l'hétérogénéité ?

Ce qui suit résoud cette problématique; toutefois, pour ne pas alourdir le sujet, nous l'analyserons:

- dans le cas restreint de milieux à 2 dimensions (*souvent employés dans les simulations numériques à particules discrètes*), qui correspond également à la déformation plane stricte, pour lequel les tenseurs d'actions aux contacts élémentaires ont tous une direction propre commune : celle de leur axe neutre (qui porte leur valeur propre nulle);
- pour des valeurs de $R(A) < 1$, correspondant aux types de mouvements qui nous intéressent ici.

1.2.1 Système de conditions sur la distribution des actions de contact

Désignons pour alléger par S la constante matérielle $\sin \psi$, et par R la fonction $R(A)$. Comme les tenseurs d'actions locales de contact sont toujours des tenseurs plans, et homothétiques entre eux (à une rotation près), on montre que pour notre milieu en déformation plane, dans le repère propre du tenseur global $\underline{\mathbf{P}}$, Figure 1-3 a), les orientations des tenseurs d'actions locales de contact dépendent d'un seul paramètre angulaire (le repérage en rotation de la direction propre positive, par un angle θ), permettant d'exprimer le tenseur local d'actions de contact dans le repère global, sous une forme simple:

$$\underline{\mathbf{p}} = \frac{Tr\{\underline{\mathbf{p}}\}}{2S} \begin{bmatrix} S + \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & S - \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Notons $f(\theta)d\theta$ la participation à la dissipation totale, de tous les tenseurs d'actions locales de contact repérés entre θ et $\theta+d\theta$, leur contribution apportée au tenseur global $\underline{\mathbf{P}}$ sera :

$$d\underline{\mathbf{P}} = \dot{W}_T \frac{f(\theta)}{2S} \begin{bmatrix} S + \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & S - \cos 2\theta \end{bmatrix} d\theta$$

où \dot{W}_T est la puissance totale dissipée dans l'amas granulaire. La fonction $f(\theta)$ est la *densité de dissipation des actions locales de contact, en fonction de leur orientation*. Cette fonction varie aussi dans le temps, au cours du mouvement.

Comme le tenseur global $\underline{\mathbf{P}}$ de notre amas granulaire en déformation plane, est solution de l'équation de dissipation, il s'exprime aussi, dans son repère propre, par :

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{\dot{W}_T}{2S} \begin{bmatrix} 1 + S - R(1 - S) & 0 \\ 0 & -(1 - S)(1 - R) \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors dans le repère propre du tenseur global, par simple intégration sur θ , entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{+\pi}{2}$, l'identité tensorielle :

$$\begin{bmatrix} 1 + S - R(1 - S) & 0 \\ 0 & -(1 - S)(1 - R) \end{bmatrix} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} f(\theta) \cdot \begin{bmatrix} S + \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & S - \cos 2\theta \end{bmatrix} d\theta$$

Il s'ensuit que :

Dans le repère propre du tenseur global des actions intérieures dans l'amas granulaire $\underline{\mathbf{P}}$ (ou du tenseur moyen), la distribution $f(\theta)$, densité de dissipation des actions locales de contact, en fonction de leur orientation, vérifie à tout instant le système des 4 conditions suivantes: (1.5)

- 1) Dissipation $f(\theta) \geq 0$
- 2) Normalisation $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} f(\theta) d\theta = 1$
- 3) Diagonalisation $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} f(\theta) \sin 2\theta d\theta = 0$
- 4) Réalimentation interne $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} f(\theta) \cos 2\theta d\theta = 1 - R(1 - S)$ pour $R < 1$.

1.2.2 Allure générale des distributions $f(\theta)$

Ces 4 conditions encadrent fortement la distribution $f(\theta)$, en particulier lorsque R prend des valeurs faibles. Dans ce sens, on montre aisément que pour $R=0$, la **seule** distribution satisfaisant les 4 conditions, est une distribution de Dirac $\delta(0)$, c'est à dire une polarisation totale de tous les tenseurs d'actions locales de contact. Nous retrouvons ici par l'analyse des distributions, un résultat plus général, démontré dans l'Approche Énergétique et dans un cadre à 3 dimensions, par des voies algébriques [17].

Lorsque R se rapproche de 1, l'encadrement de $f(\theta)$ par les 4 conditions se fait plus lâche, et de nombreuses solutions particulières peuvent être trouvées.

Enfin, observons que, pour R donné, l'ensemble des solutions $f(\theta)$ vérifiant les 4 conditions (1.5), est un **ensemble convexe**.

Par ailleurs, l'orientation des normales aux contacts en glissement, est liée à l'orientation des tenseurs d'actions locales de contact, à une symétrie près, suivant que le glissement est dextre ou senestre, figure 1-3 b) et c). Cette indétermination de symétrie, peut être objectivement levée dans certains cas, comme celui de mouvements sous conditions aux limites régulières, avec une cinématique de parois rigides aux frontières : les configurations 1-3b) et 1-3c) doivent être considérées comme *équiprobables*, car les parois rigides interdisent en particulier le plein développement de bandes de localisation uniques, qui briseraient la symétrie des mouvements de cisaillement.

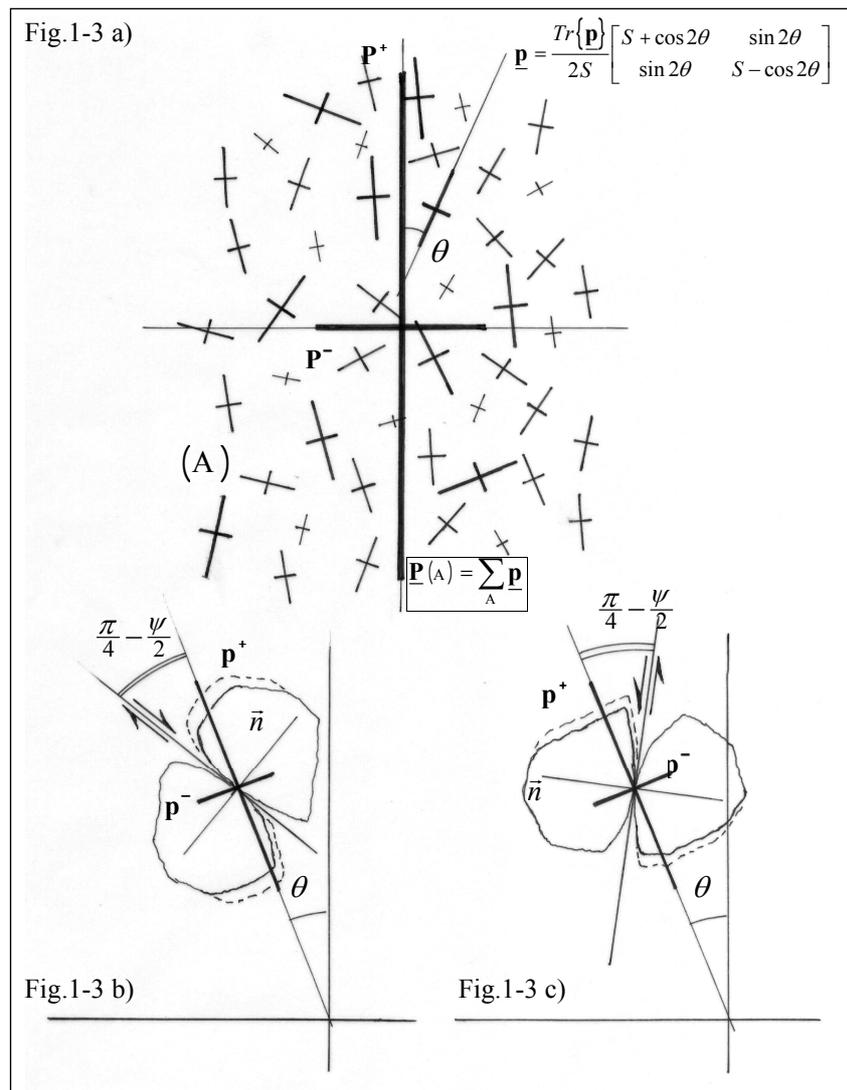


Figure 1-3 : Distributions d'actions de contact élémentaires (milieu 2D.)

On voit apparaître ici le lien explicite entre :

- a) la distribution des orientations des contacts glissants, et celle des tenseurs d'actions locales de contact ;
- b) la distribution $f(\theta)$, et la distribution des orientations des contacts glissants, pondérée par leurs participations à la dissipation totale.

Les 4 conditions permettent aussi de construire un échantillonnage de ces distributions $f(\theta)$, paramétré en R .

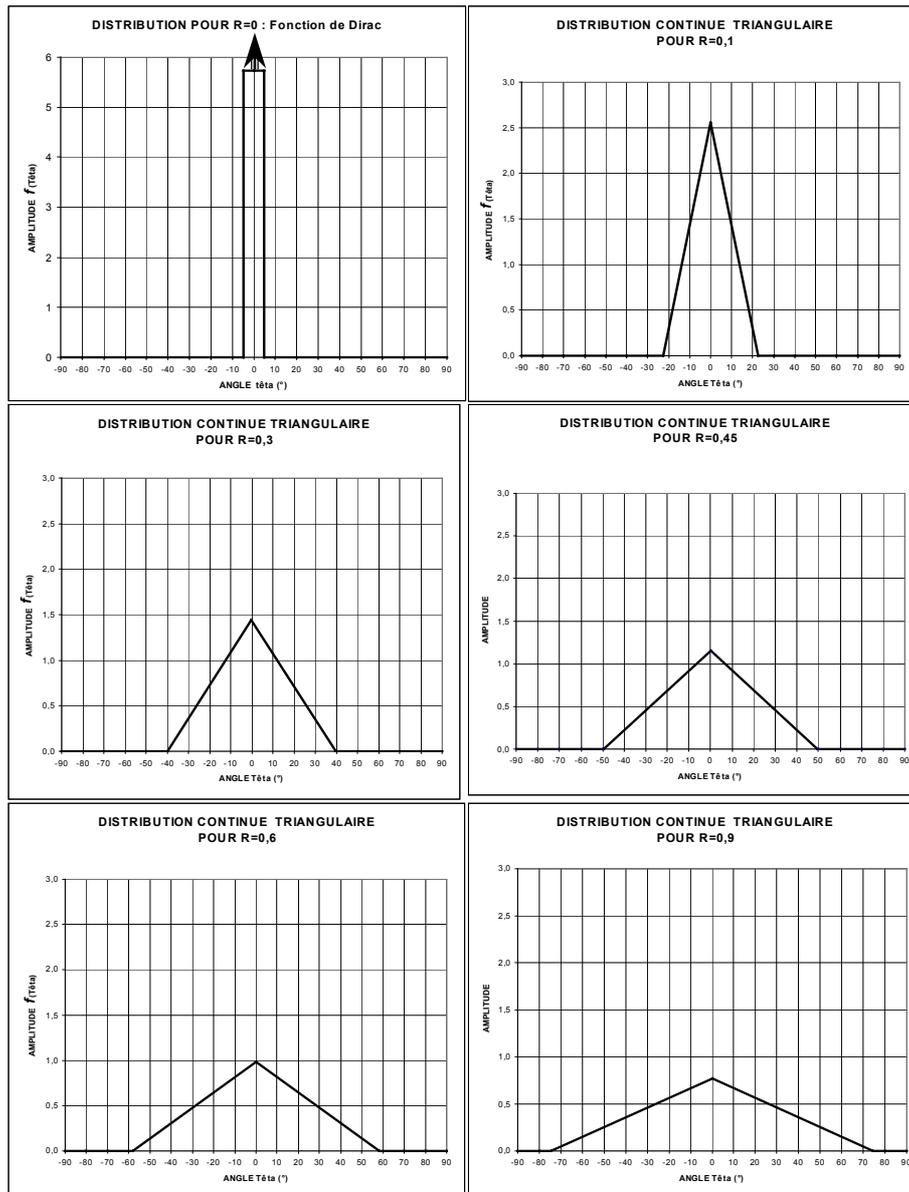


Figure 1-4 a: Distributions triangulaires élémentaires $f(\theta)$ paramétrées en R
-Représentation directe (θ compris entre -90 et $+90^\circ$)-

La Figure 1-4 détaille le cas de distributions triangulaires élémentaires, pour les valeurs de $R=0$ (distribution de Dirac); $R=0,1$; $0,3$; $0,45$; $0,6$; et $0,9$:

- en représentation directe de $f(\theta)$ en Figure 1-4a);
- en représentation polaire sur les normales aux contacts en Figure 1-4b), ce qui revient à porter sur les normales la participation à la dissipation.

Les Figures 1- 4a) et 1-4b), construites pour la valeur type $S=0,5$ (soit un angle de friction physique ψ de 30°) montrent que, tant que $R < 0,5$ environ, les distributions sont nettement polarisées sur les directions de la dissipation minimale théorique. Ceci signifie que pour de telles valeurs de R :

- même si la distribution **générale** des orientations des contacts ne montre pas de polarisation nette, ce qui est en général le cas dans les simulations numériques;
- il faut s'attendre à ce que la distribution restreinte aux contacts **actifs** (ceux qui glissent et qui dissipent), pondérée par leurs participations à la dissipation totale, s'avère clairement polarisée.

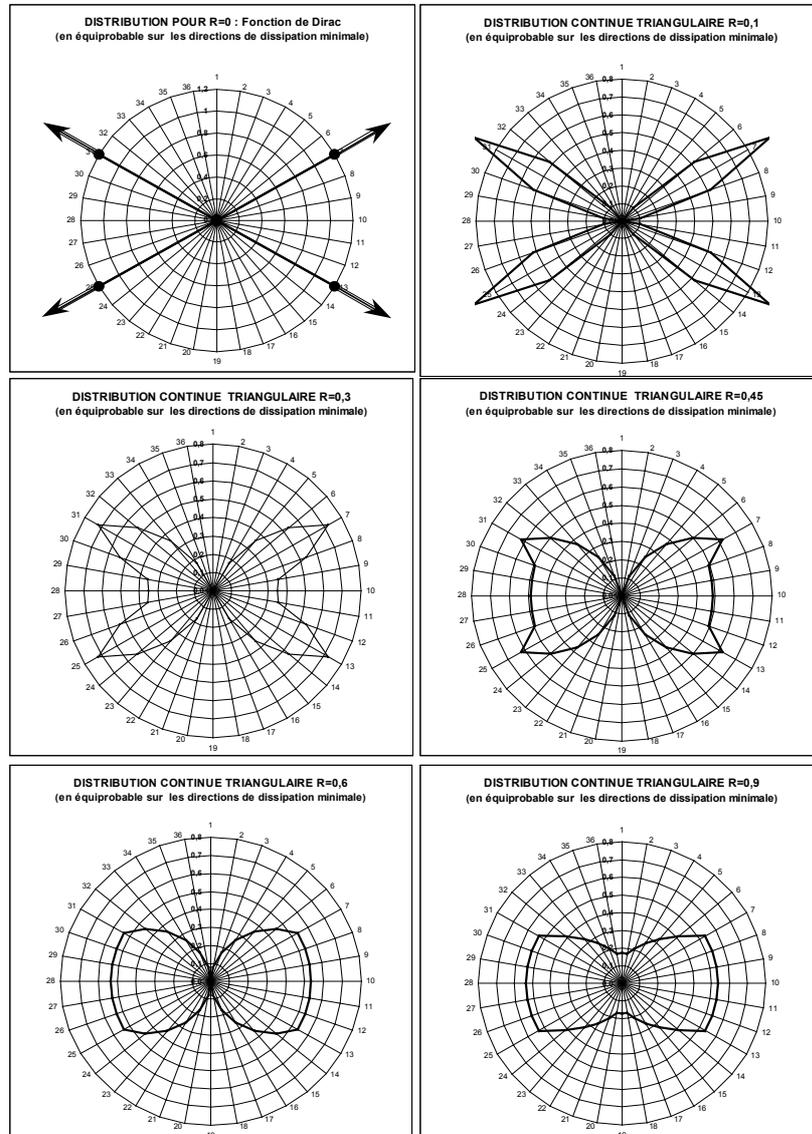


Figure 1-4b: Distributions triangulaires élémentaires $f(\theta)$ paramétrées en R
-Représentation polaire sur les normales aux contacts-

1.2.3 Compatibilité avec des fluctuations d'hétérogénéité

Etant vérifié à tout instant, le système des 4 conditions donne aussi des indications sur l'évolution au cours du temps, de la fonction $f(\theta, t)$, en tenant compte de l'évolution du taux de réalimentation interne $R(A, t)$ au cours du mouvement. Observons que si $f_1(\theta, t)$ et $f_2(\theta, t)$ sont deux solutions particulières vérifiant le système des 4 conditions, alors leur différence $\tilde{f}(\theta, t) = f_1(\theta, t) - f_2(\theta, t)$ vérifie le système linéaire homogène constitué, à partir des conditions précédentes (1.5), par les

conditions $\begin{cases} (2') \\ (3) \\ (4') \end{cases}$ avec **zéro** à tous les seconds membres. Une famille remarquable de

solutions particulières en est : $\tilde{f}_k(\theta, t) = g_a(t) \cdot \cos[(2k + 2)\theta + g_p(t)]$ où k est un entier positif, et $g_a(t), g_p(t)$ des fonctions du temps. Ces solutions particulières peuvent s'interpréter comme des **fluctuations temporelles**, car elles sont neutres vis à vis des conditions (2) à (4), dont $g_a(t)$ représente l'amplitude, et $g_p(t)$ la phase.

Etant donnée la fonction $R(A, t)$, si l'on définit par une méthode objective **une** solution particulière de référence f_0 du système de conditions (1) à (4) (*par exemple en prenant pour f_0 la solution particulière « la plus régulière »*, celle qui minimise

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [f'(\theta)]^2 d\theta$), toute autre solution f du système s'obtiendra donc sous la forme

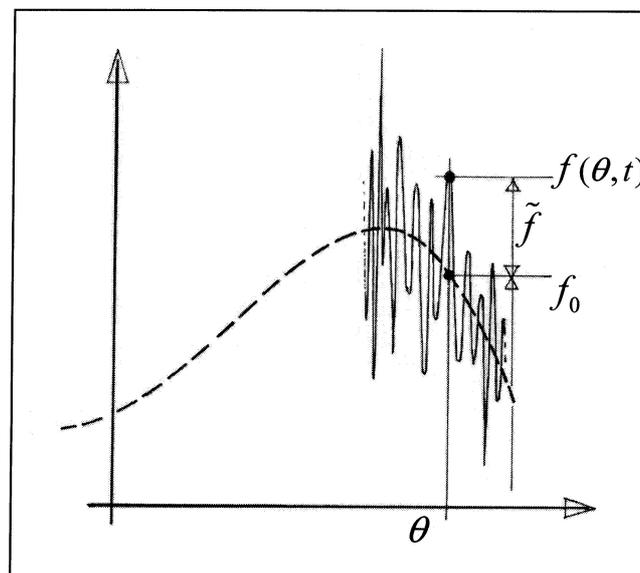
$f = f_0 + \tilde{f}$, Figure 1-5.

Ces termes de fluctuations ont de ce fait une double signification :

a) à $R(A, t)$ donnée, la distribution correspondante des actions locales de contact $f(\theta, t)$, n'est déterminée qu'à un ensemble de fluctuations près (*c'est à dire un terme $\sum \tilde{f}_k(\theta, t)$*);

b) si l'on trouve un moyen expérimental de déterminer la distribution $f(\theta, t)$, il faut s'attendre à ce que plus on affine la mesure, plus on trouve de détail dans les fluctuations .

Figure 1-5



En conclusions:

- observons que le système homogène $\begin{cases} (2') \\ (3) \\ (4') \end{cases}$ qui régit ces fluctuations, n'apporte

aucune condition supplémentaire par rapport aux conditions 1) à 4), nous retrouvons donc ici à travers l'analyse directe des distributions statistiques d'actions de contact, **la compatibilité naturelle des actions intérieures avec l'hétérogénéité**, déjà notée dans la section antérieure, mais ici dans le cas de mouvements plus généraux ($R \neq 0$);

- observons aussi que cette compatibilité résulte de la convexité de l'ensemble des solutions des conditions (1.5);
- si des indications expérimentales (par simulations numériques par exemple) peuvent être obtenues sur la distribution $f(\theta, t)$, les conditions (1.5) peuvent être utilisées dans l'autre sens, par exemple pour évaluer la fonction $R(A, t)$:

$$R(A, t) = \frac{1 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\theta, t) \cos 2\theta d\theta}{(1 - S)}$$

Enfin le raisonnement tenu ici s'étend au mouvement général à trois dimensions, en repérant les tenseurs locaux d'actions de contact par les angles d'Euler de leur repère propre dans le référentiel global; nous y trouvons deux conditions supplémentaire de diagonalisation à satisfaire par la distribution f , qui dépend alors de trois variables angulaires au lieu d'une. Toutefois le degré d'indétermination y est plus fort (6 conditions pour 3 variables à 3D, au lieu de 4 pour 1 variable à 2D).

1.3 LE MILIEU CONTINU EQUIVALENT AU VOISINAGE PROCHE DE LA DISSIPATION MINIMALE

1.3.1 Conditions physiques particulières

Dans le domaine matériel D du milieu continu équivalent en mouvement proche de la dissipation minimale, par lequel nous représentons un amas granulaire discontinu A , le tenseur moyen des actions intérieures $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)}$ est relié au tenseur de

l'amas granulaire discontinu par
$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)} = \frac{1}{V_{(D)}} \int_D \boldsymbol{\pi}_{(M)} dv = \frac{1}{V_{(D)}} \mathbf{P}(A) \quad (1.6)$$

Il vérifie donc l'équation de la dissipation minimale

$$Tr\{\overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)}\} = \sin \psi \cdot N_{\parallel} \left\{ \overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)} \right\}$$

et sa forme équivalente sur les puissances reçues et puissances rendues

$(1 - \sin \psi) \overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)}^+ = -(1 + \sin \psi) \overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)}^-$, ainsi que les autres conditions vérifiées par

$\mathbf{P}(A)$. Cette propriété est également vérifiée sur tout sous-domaine de D , de par la propriété de *similitude interne* attachée à la dissipation minimale, et, quel que soit le sous-domaine D_1 inclus dans D , les puissances reçues $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D_1)}^+$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)}^+$ d'une part, et

d'autre part les puissances rendues $\overline{\boldsymbol{\pi}}^-_{(D_1)}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}^-_{(D)}$, sont portées par les mêmes ensembles de directions vectorielles, comme pour le tenseur de l'amas discontinu. En résumé, lorsqu'un domaine matériel D est proche de la dissipation minimale:

- les tenseurs **locaux** des actions intérieures, et le tenseur **moyen** sur D des actions intérieures, vérifient la même équation de dissipation d'énergie, ont au moins une direction propre commune, et ont la même signature;
- de plus, le tenseur des actions intérieures vérifie la forme "milieu continu équivalent" de l'égalité (1.2), la norme du tenseur moyen $N_{\parallel} \left\{ \overline{\boldsymbol{\pi}}_{(D)} \right\}$ est égale à la moyenne de la norme des tenseurs locaux $\overline{N_{\parallel} \left\{ \boldsymbol{\pi}_{(M)} \right\}}$;
- enfin, le tenseur local n'est plus nécessairement plan, à la différence du cas discontinu, car pour un milieu continu représentant un amas granulaire formé de granulats de dimensions variée à granulométrie étalée, la correspondance entre éléments de volume représentatifs de l'échelle "locale" $\delta V \approx \frac{V_{(D)}}{N_{(A)}}$ et les contacts élémentaires n'a guère de signification, le volume représentatif de l'échelle locale pour les plus gros granulats, ne l'étant pas pour les plus petits, etc.; on doit donc se limiter à la similitude entre $\boldsymbol{\pi}^+_{(M)}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}^+_{(D)}$ d'une part, et d'autre part entre $\boldsymbol{\pi}^-_{(M)}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}^-_{(D)}$.

1.3.2 Représentation de l'hétérogénéité admissible

Dans ce cas, le plus général, on obtient la représentation suivante de l'hétérogénéité admissible sur les actions intérieures:

- en Mode I, les tenseurs moyens et locaux ont pour direction propre commune la direction 1, qui porte l'unique valeur propre positive, et l'hétérogénéité locale peut être représentée par deux fonctions scalaires $\lambda_{(M)}$ et $\mu_{(M)}$ qui relient les valeurs propres des tenseurs locaux et moyens

$$(1.7 \text{ a}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\pi}_{1(M)} = \overline{\boldsymbol{\pi}}_{1(D)} \cdot (1 + \lambda_{(M)}) \quad \text{avec } 0 \leq 1 + \lambda_{(M)} \text{ et } \int_D \lambda_{(M)dv} = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_{2(M)} = \frac{1}{2} (\overline{\boldsymbol{\pi}}_{2(D)} + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{3(D)}) \cdot (1 + \lambda_{(M)}) \cdot (1 + \mu_{(M)}) \quad \text{avec } 0 \leq 1 + \mu_{(M)} \text{ et } \int_D \mu_{(M)dv} = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_{3(M)} = \frac{1}{2} (\overline{\boldsymbol{\pi}}_{2(D)} + \overline{\boldsymbol{\pi}}_{3(D)}) \cdot (1 + \lambda_{(M)}) \cdot (1 - \mu_{(M)}) \quad \text{avec } 0 \leq 1 - \mu_{(M)} \end{cases}$$

- en Mode II, on trouve une configuration symétrique en permutant les rôles des directions 1 et 3;
- en Mode frontière en déformation plane ($\boldsymbol{\pi}_2 = 0$), les trois directions propres sont communes, et l'hétérogénéité locale ne comprend plus que la seule fonction scalaire $\lambda_{(M)}$ qui relie les valeurs propres des tenseurs locaux et moyens

$$(1.7 \text{ b}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\pi}_{1(M)} = \overline{\boldsymbol{\pi}}_{1(D)} \cdot (1 + \lambda_{(M)}) \quad \text{avec } 0 \leq 1 + \lambda_{(M)} \text{ et } \int_D \lambda_{(M)dv} = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_{2(M)} = \overline{\boldsymbol{\pi}}_{2(D)} \cdot (1 + \lambda_{(M)}) = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_{3(M)} = \overline{\boldsymbol{\pi}}_{3(D)} \cdot (1 + \lambda_{(M)}) \end{cases}$$

Les conditions ci-dessus sont donc les conditions de compatibilité cherchées, en ce qui concerne l'hétérogénéité des actions intérieures du milieu continu équivalent.

Leur validité couvre le cas général des mouvements de dissipation minimale, qu'il y ait ou non coaxialité des tenseurs de contraintes et de vitesses de déformation. Enfin, comme pour le discontinu, ces conditions sont simplement la traduction des propriétés de la dissipation minimale, au niveau des hétérogénéités locales sur les actions intérieures, sans apporter aucune nouvelle restriction.

Les actions intérieures du milieu continu équivalent, en mouvement proche de la dissipation minimale, sont donc naturellement compatibles avec l'hétérogénéité.

1.4 CONCLUSIONS SUR LA COMPATIBILITE AVEC L'HETEROGENEITE DES ACTIONS INTERIEURES

1.4.1 Au voisinage proche de la dissipation minimale

L'amas granulaire discontinu et sa représentation par un milieu continu équivalent, vérifient donc la propriété que nous désignons par

Compatibilité naturelle avec l'hétérogénéité des actions intérieures

Etant donné un mouvement proche de la dissipation minimale:

- **1]** si nous fixons la donnée du tenseur global $\underline{\mathbf{P}}(A)$ ou son équivalent $\overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{(D)}$, qui vérifient l'équation de la dissipation minimale:
 - toute distribution discontinue $\underline{\mathbf{p}}(n)$ demeurant dans le même voisinage de la dissipation minimale que $\underline{\mathbf{P}}(A)$, et telle que $\sum_A \underline{\mathbf{p}}(n) = \underline{\mathbf{P}}(A)$, est une **solution hétérogène admissible**, qui vérifie aussi l'équation de la dissipation minimale;
 - de même toute distribution continue hétérogène $\underline{\boldsymbol{\pi}}_{(M)}$ demeurant dans le même voisinage de la dissipation minimale que $\overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{(D)}$, et telle que $\int_D \underline{\boldsymbol{\pi}}_{(M)} dv = V_{(D)} \cdot \overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{(D)}$ (conditions 1.7), est une **solution hétérogène admissible**, qui vérifie aussi l'équation de la dissipation minimale;
- **2]** dans l'autre sens, si nous fixons la donnée de distributions hétérogènes en dissipation minimale (c'est à dire $\underline{\mathbf{p}}(n)$ ou $\underline{\boldsymbol{\pi}}_{(M)}$), alors leur moyenne sur le domaine matériel en mouvement (c'est à dire $\frac{1}{N(A)} \cdot \underline{\mathbf{P}}(A)$ ou $\overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{(D)}$) est une **solution homogène admissible**, appartenant au même voisinage de la dissipation minimale, et qui vérifie aussi l'équation de la dissipation minimale.
- **3]** autrement dit, si l'équation de la dissipation minimale est vérifiée par les valeurs locales, elle est également vérifiée par les valeurs moyennes des actions intérieures, en dépit de l'hétérogénéité du mouvement.

Cette propriété est due à ce que, sur un voisinage proche donné de la dissipation minimale, les deux membres de l'équation de dissipation deviennent des fonctions du tenseur des actions intérieures vérifiant $f(\underline{\boldsymbol{\pi}}_{(M)}) = f(\overline{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{(D)})$. En effet la Trace est toujours un opérateur linéaire, et nous avons vu (section 1.1, relation (1.2), et section

1.3.1) que cette condition est vérifiée par la Norme N_{\parallel} au voisinage de la dissipation minimale.

A partir de cette condition, on peut condenser ce qui précède sous une forme qui trouvera son utilité plus loin (section 2.2):

- considérons un domaine matériel en mouvement, partout au voisinage de la dissipation minimale; les propriétés des actions intérieures et de la dissipation minimale, font qu'il vérifie toujours

$$\begin{cases} \overline{Tr\{\underline{\pi}_{(M)}\}} = \overline{Tr\{\underline{\pi}_{(D)}\}} \\ \overline{N_{\parallel}\{\underline{\pi}_{(M)}\}} = N_{\parallel}\{\overline{\underline{\pi}_{(D)}}\} \end{cases} \quad (1.8)$$

- l'équation de la dissipation minimale $Tr\{\underline{\pi}_{(M)}\} = \sin\psi.N_{\parallel}\{\underline{\pi}_{(M)}\}$, étant vérifiée partout sur les valeurs locales, implique par simple opération de moyennage sur le domaine:

$$\overline{Tr\{\underline{\pi}_{(M)}\}} = \sin\psi.\overline{N_{\parallel}\{\underline{\pi}_{(M)}\}} \quad (1.9)$$

- le rapprochement de (1.9) et (1.8) mène directement à

$$\overline{Tr\{\underline{\pi}_{(D)}\}} = \sin\psi.N_{\parallel}\{\overline{\underline{\pi}_{(D)}}\} \quad (1.10)$$

c'est à dire l'équation de la dissipation minimale, mais **écrite avec les valeurs moyennes** des actions intérieures.

A partir de cette condition, on déduit aussi que sur un voisinage d'un Mode donné de dissipation minimale, **l'ensemble des solutions admissibles pour les actions intérieures, est un ensemble convexe.**

Deux conséquences notables en sont que si nous fixons globalement la donnée des conditions moyennes (le tenseur global $\underline{\mathbf{P}}(A)$ ou son équivalent $\overline{\underline{\pi}_{(D)}}$) alors:

- la moyenne en un point matériel de l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles (*moyenne locale*), est égale à la moyenne sur l'ensemble du domaine matériel, d'une de ces solutions hétérogènes admissibles (*moyenne globale*), et

cette moyenne vaut $\frac{1}{N(A)}.\underline{\mathbf{P}}(A)$ ou $\overline{\underline{\pi}_{(D)}}$;

- l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles inclut aussi la solution

homogène, qui vaut $\frac{1}{N(A)}.\underline{\mathbf{P}}(A)$ ou $\overline{\underline{\pi}_{(D)}}$.

Enfin remarquons que pour l'équation de la dissipation minimale, et ses diverses conséquences mécaniques (contraction ou dilatance au cours du cisaillement, critère de rupture, etc..) ces propriétés font que les actions intérieures peuvent être résumées par leurs valeurs moyennes, sans que cela introduise de distorsion.

1.4.2 Situations avec réalimentation interne

A niveau de désordre fixé par la donnée de R , la section 1.2 montre que les distributions de tenseurs d'actions de contact admissibles constituent encore **un ensemble convexe**, indépendamment de la question de l'hétérogénéité.

Nous admettrons donc que, pour R suffisamment faible, l'ensemble des solutions hétérogènes admissibles pour les actions intérieures, est un ensemble convexe, par rapport à l'hétérogénéité, et par rapport à la distribution des orientations.