

Localisation de Déformations et Chaînes de Contraintes

en Mécanique des Milieux Granulaires

E.FROSSARD

Expert, Bureau d'Ingénieurs-Conseils Coyne et Bellier

frossardetienne@aol.com

Abstract

A former paper has shown recently that a wide set of essential properties of mechanical behavior in granular media, result explicitly of statistical physics which rules the energy dissipation by friction at interparticle contacts, within the moving granular mass (ref.[17]). This new approach, which includes as key feature a minimum energy-dissipation rule, has been called the Energy Approach ("l'Approche Energétique").

The present paper is aimed at applying this new approach to the phenomenon of strain localization and stress concentrations, considered here as resulting of the progressive growth of heterogeneities, triggered by statistical fluctuations within the moving granular mass.

The first part focus on the relations, defined by the the framework of the Energy Approach between local and average variables within heterogeneous movements. For usual movements under regular conditions, the heterogeneities of stresses and strain rates, are shown to comply with a set of two compatibility conditions. These conditions, related to thermodynamic consistency, occur to be an extension of the classical Hill-Mandel macro-homogeneity condition. Under these compatibility conditions, the equations of Energy Approach, when verified locally, result to hold also for the average variables, in spite of the presence of strong heterogeneities, including eventual localization of strains in shear bands, together with stress concentrations.

On this basis, are then analyzed the main following features:

- *the orientation of shear bands, and stress concentration lines, where classical values are found for shear band orientation, however with the result that the relation between shear band orientation and dilatancy is found to depend strongly upon the type of micromechanism producing dilatancy;*
- *the internal structure of macroscopic shear bands, where the structure defined by the Energy Approach, matches fairly well with the structure described by experimental micrometric measurements recently published by Nemat-Nasser and Okada(ref.[9]); and where the confrontation with these experimental results leads to detail the features of these shear structures in function of key material parameters, in particular average diameter of particles, e.g. the shear structure width concentrating 99% of dissipation, is found to be about $12 \bar{d}$;*
- *the internal structure of eventual macroscopic stress concentration lines, for which specific limitations (static equilibrium conditions, macroscopic Failure Criterion) are shown to limit the macroscopic effects to weak structures as compared with shear bands, keeping the strong stress concentration lines within the microscopic scale of contact forces;*
- *the criterion of localization development, considered as a particular kind of heterogeneity growth, induced by the minimum dissipation rule, the resulting criterion is found based on non-convexity of specific energy dissipation rate, towards correlated fluctuations in density and strain; the resulting features of localization development correspond quite well to experimental results;*
- *the evolution of parallel shear bands systems, where it is shown explicitly that under monotonous strain conditions, the evolution is leading to the concentration of one set of shear bands into a unique shear band, itself concentrating the movements up to the maximum allowable: this results to be a complete micromechanism for generation of **failure lines**.*

NOTATIONS

LE DISCONTINU

Contact élémentaire

$\vec{f}(a/b)$	force de contact exercée par le grain (a) sur le grain (b)
$\vec{v}(a/b)$	vitesse de glissement au contact, du grain (a) par rapport au grain (b)
$\ \vec{v}\ $	norme euclidienne du vecteur \vec{v}
ψ	angle de friction physique moyen aux contacts entre grains
$\underline{\mathbf{p}}(a/b)$	tenseur des actions de contact (a/b) :
$\underline{\mathbf{p}}(a/b) = \frac{1}{2} \{ \vec{f}(a/b) \otimes \vec{v}(a/b) + \vec{v}(a/b) \otimes \vec{f}(a/b) \}$ $p_{ij}(a/b) = \frac{1}{2} [f_i(a/b) \cdot v_j(a/b) + f_j(a/b) \cdot v_i(a/b)]$	
\mathbf{p}_i	valeur propre du tenseur $\underline{\mathbf{p}}$
$\mathbf{p}^+(a/b)$	“puissance reçue” au contact élémentaire:
	somme des valeurs propres <i>positives</i> du tenseur $\underline{\mathbf{p}}(a/b)$
$\mathbf{p}^-(a/b)$	“puissance rendue” au contact élémentaire:
	somme des valeurs propres <i>negatives</i> du tenseur $\underline{\mathbf{p}}(a/b)$
$Tr\{\underline{\mathbf{p}}\}$	trace du tenseur $\underline{\mathbf{p}}$
$N_{\parallel}\{\underline{\mathbf{p}}\}$	norme tensorielle du tenseur $\underline{\mathbf{p}}$, somme des valeurs absolues des valeurs propres de $\underline{\mathbf{p}}$:
$N_{\parallel}\{\underline{\mathbf{p}}\} = \sum_i \mathbf{p}_i $	

Amas granulaire

$\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$	tenseur des actions intérieures de l'amas granulaire \mathbf{A} : somme des tenseurs des actions de tous les contacts élémentaires contenus dans l'amas.
$\mathbf{P}^+(\mathbf{A})$	“puissance reçue” de l'amas granulaire:
	somme des valeurs propres <i>positives</i> du tenseur $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$
$\mathbf{P}^-(\mathbf{A})$	“puissance rendue” de l'amas granulaire:
	somme de valeurs propres <i>negatives</i> du tenseur $\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{A})$
R	taux de réalimentation interne
\bar{d}	diamètre moyen des granulats

MILIEU CONTINU EQUIVALENT

$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ Tenseurs (eulériens) des contraintes et des vitesses de déformation

$\left. \begin{array}{l} \overline{\underline{\underline{\sigma}}}^{(D)}, \overline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}^{(D)} \\ \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_{(M)}, \tilde{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_{(M)} \end{array} \right\}$ Composantes tensorielles moyennes (domaine D) et fluctuations locales (point M) des contraintes et vitesses de déformation

$\dot{\gamma}$ Taux ou vitesse de cisaillement (*description eulérienne*)

Γ Cisaillement nominal (*description lagrangienne*)

$\underline{\underline{\pi}}$ Tenseur des actions intérieures, pour le milieu continu :

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{1}{2} \{ \underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \otimes \underline{\underline{\sigma}} \} \text{ (produit contracté)}$$

$$\pi_{ij} = \frac{1}{2} \{ \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \dot{\epsilon}_{il} \sigma_{lj} \}$$

π^+ “Puissance reçue” du milieu continu équivalent:
somme des valeurs propres **positives** du tenseur $\underline{\underline{\pi}}$

π^- “Puissance rendue” du milieu continu équivalent:
somme des valeurs propres **négatives** du tenseur $\underline{\underline{\pi}}$

$\dot{\omega}$ Taux de dissipation spécifique

v_s Volume spécifique

$E(D, t_0, t)$ “Déformation spécifique” définie par

$$E(D, t_0, t) = \frac{1}{m_D} \int_{t_0}^t \left\{ \int_D \frac{1}{2} [N_{\parallel} \{ \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \}] dv \right\} d\tau$$

CONVENTIONS ET HYPOTHESES DE BASE

Dans ce qui suit, nous analysons le mouvement, dans des référentiels orthonormés, de matériaux granulaires dans les conditions suivantes, au voisinage de l'équilibre statique :

- 1) le milieu est soumis à des déformations lentes, résultant de mouvements localisés aux contacts entre les grains, ces contacts sont unilatéraux, et purement frictionnels; les coefficients de friction sur ces contacts sont suffisamment voisins pour être représentés par une valeur moyenne unique.
- 2) les grains sont indéformables, de dimensions et de formes aléatoires, mais suffisamment proches de la convexité pour que:
 - les zones de contact entre deux grains puissent être raisonnablement schématisées par un seul point de contact;
 - le matériau granulaire dans son ensemble ne présente aucune résistance à la traction localement ou globalement (condition de non-traction);
- 3) l'énergie dissipée dans les contacts est due aux seuls mouvements relatifs de glissement, le poids de la dissipation due aux mouvements de pivotement et de roulement demeure négligeable; la représentation du torseur des efforts de contact par sa seule résultante, est suffisante;
- 4) les mouvements sont suffisamment lents pour que les effets dynamiques incluant ceux de l'énergie cinétique, demeurent négligeables; dans les termes de dissipation, les effets purement thermiques (gradients, conduction..) sont également négligeables par rapport à la dissipation directe d'énergie mécanique;
- 5) si le milieu granulaire est baigné par un fluide remplissant les vides intergranulaires, la pression du fluide est prise comme origine des pressions (raisonnement sur les forces intergranulaires, ou les contraintes effectives), et l'on considère des mouvements suffisamment lents dans le milieu pour que les échanges d'énergie avec le fluide restent négligeables (la contrainte d'interface demeure la simple pression du fluide);
- 6) dans la représentation eulérienne du milieu continu équivalent, contraintes de compression et déformations de contraction seront notées positivement, suivant les usages en géomécanique.
 En tout point M d'un domaine matériel D en mouvement, les valeurs locales $\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}$ des contraintes et vitesses de déformations résultent:
 - d'une composante moyenne $\overline{\underline{\sigma}}(D), \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}(D)$, sur laquelle s'exercent les gradients de grande échelle dus aux actions extérieures (par exemple la pesanteur);

- d'une composante locale d'hétérogénéité $\tilde{\underline{\sigma}}_{(M)}, \tilde{\underline{\dot{\epsilon}}}_{(M)}$ à résultante nulle, de nature aléatoire, due à l'hétérogénéité inhérente du milieu;

Les corrélations éventuelles entre ces hétérogénéités locales en contraintes et en vitesses de déformation, sont supposées s'affaiblir suffisamment avec la distance, pour qu'à partir d'une certaine échelle elles n'aient plus d'incidence sur *la Puissance des efforts intérieurs*, ni sur *la Norme des actions intérieures*.

Plus précisément, nous envisagerons des domaines matériels macroscopiques du milieu évoluant dans un voisinage suffisamment proche des modes de dissipation minimale, pour que les fluctuations locales et valeurs moyennes vérifient les deux conditions de compatibilité:

$$\begin{cases} \overline{Tr \{ \underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) \}} = Tr \{ \underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}) \} \\ \overline{N_{\parallel} \{ \underline{\pi}(\underline{\sigma}, \underline{\dot{\epsilon}}) \}} = N_{\parallel} \{ \underline{\pi}(\overline{\underline{\sigma}}, \overline{\underline{\dot{\epsilon}}}) \} \end{cases}$$

INTRODUCTION

L'analyse mécanique des déformations de grandes masses en Géologie, a souligné depuis longtemps la fréquence de configurations où les déformations d'ensemble se concentrent en d'étroites bandes, séparant des panneaux peu affectés par la déformation: ce sont les "kinkbands", "shearbands", et les failles de la Géologie descriptive.

En même temps, il a été montré de manière explicite ([1], [2]), que l'hétérogénéité mécanique, ici de nature *matérielle* (juxtaposition de couches de rigidités et plasticités différentes) joue un rôle clé dans l'apparition de ces configurations localisées de la déformation, en mettant en œuvre un principe simple d'extrémum énergétique: *"...pour une même déformation globale, on peut admettre que, de toutes les éventualités [de mécanismes de déformation] envisagées, celle qui correspond à la moindre absorption d'énergie est la plus vraisemblable, ou la plus proche de la réalité"*.

De même, la Mécanique des Sols, dès ses débuts, [3], [4], a identifié des mécanismes de rupture construits sur des discontinuités cinématiques (les "lignes de ruptures"), permettant de simplifier l'analyse de stabilité d'ouvrages et de massifs, Figure 1- 1 a); cette démarche demeurant une méthode de référence, [5].

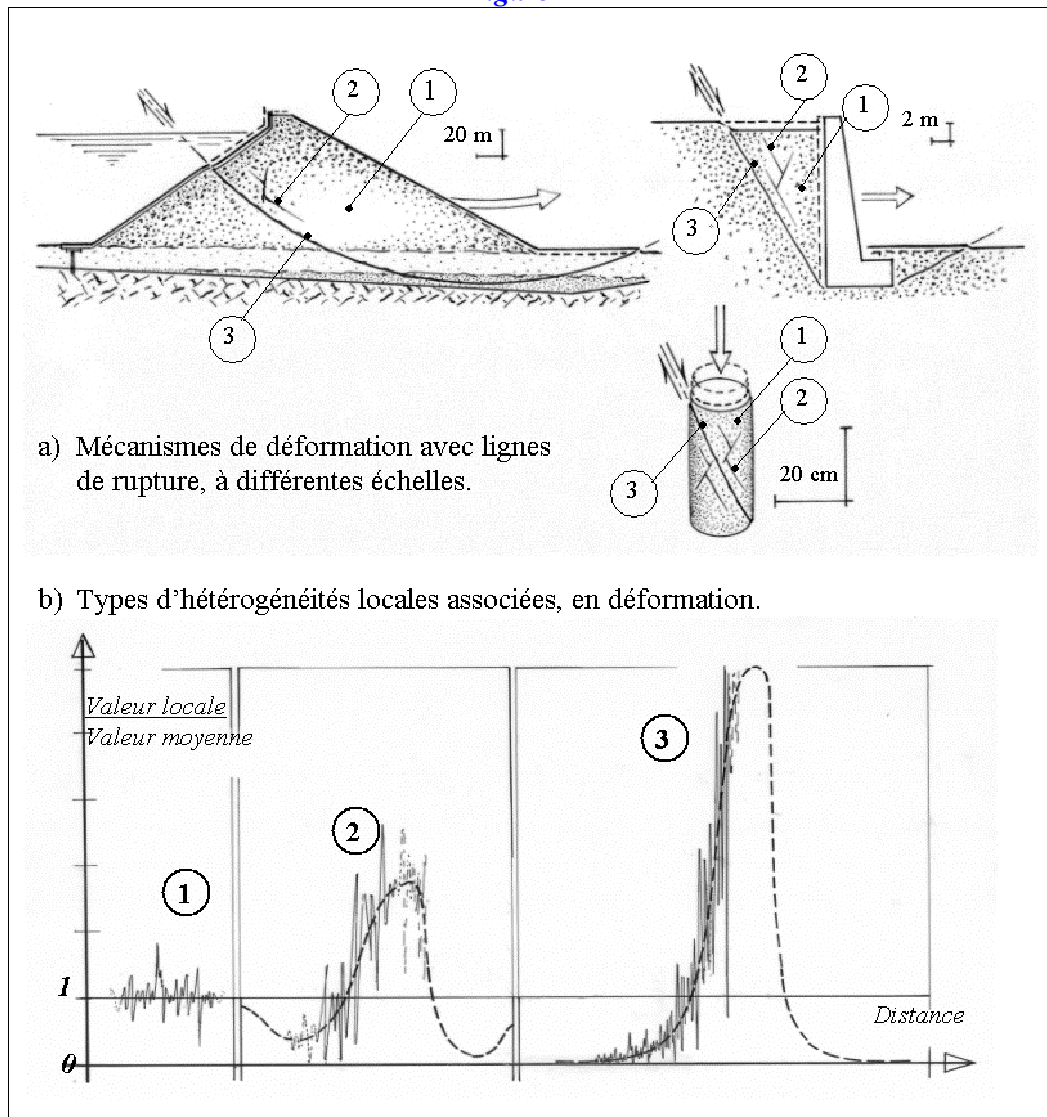
Plus récemment, les développements d'approches en "milieu continu", et leurs applications pratiques dans les modèles numériques, ont renouvelé l'intérêt pour les causes matérielles intrinsèques, qui gouvernent l'apparition et le développement de telles concentrations de déformations. En effet, celles-ci sont à la charnière entre les méthodes de "milieux continus" et les méthodes traditionnelles par "lignes de rupture" d'une part, et d'autre part elles sont vraisemblablement à l'origine des effets de ruptures progressives apparaissant dans certains ouvrages.

Des expérimentations physiques particulièrement élaborées, ont donné une vision approfondie de leur développement, dont on sait dorénavant qu'il accompagne inéluctablement la déformation des milieux granulaires, quel que soit le soin apporté à l'homogénéité du corps d'épreuve et à la régularité des conditions aux limites. Parmi ces expérimentations, se signalent en particulier:

- les mesures par stéréophotogrammétrie sur essais "biaxiaux" (déformation plane), et par tomographie par rayons X numérisée, sur essais "triaxiaux" (contraintes axissymétriques), développées à l'Institut de Mécanique de Grenoble par J.Desrues et ses collaborateurs [6], et reprises récemment à plus grande échelle aux USA [7];
- les mesures combinant la radiographie par rayons X et l'analyse de plaques minces par microscopie, sur essais "biaxiaux" ou sur cylindre creux, développées au Japon par M.Oda et al. [8], et aux USA par S.Nemat-Nasser et al. [9].

En ce qui concerne les modèles théoriques de la localisation, une approche du sujet a pu être développée dans le cadre de l'élastoplasticité, à la suite de travaux fondateurs dus en particulier à R.Hill [10], J.Mandel [11], J.R.Rice et J.W.Rudnicki [12]. Cette approche traite l'apparition des bandes de cisaillement comme une discontinuité, dans le temps et dans l'espace, du champ des déformations; une synthèse claire pourra en être trouvée dans [13] et [14].

Figure 1-1



Dans ce cadre élastoplastique, l'apparition de ces bandes, ainsi que leur orientation, sont alors données :

- a) pour la condition d'apparition (ou "critère de localisation")- par la condition qu'un certain "tenseur acoustique" devienne singulier, ce qui se produit en particulier lorsqu'un matériau élastoplastique évolue vers un radoucissement ("strain softening");
- b) pour l'orientation des bandes- par les directions de l'espace qui rendent singulier ce "tenseur acoustique".

Cette approche élastoplastique du sujet permet déjà de modéliser le développement de ruptures progressives dans des ouvrages simples, où les conditions d'équilibre induisent des concentrations d'efforts de cisaillement, tels des remblais contenus par des murs de soutènement [15].

Toutefois, cette schématisation s'appuie sur le présupposé de l'Elastoplasticité, lequel, dans le cadre des milieux granulaires, demeure une hypothèse d'ordre

phénoménologique, qui pour le moment n'a pu être reliée à la microphysique de ces milieux, à la connaissance de l'auteur.

Par ailleurs, cette approche élastoplastique envisage le milieu granulaire en mouvement comme un milieu homogène dans lequel surgissent des singularités de mouvement. Les résultats expérimentaux, confirmés par les simulations numériques sur modèles discrets [16] en donnent plutôt la vision d'un milieu profondément hétérogène et fluctuant à l'échelle locale. Dans un tel cadre, certaines hétérogénéités locales de mouvement, apparaissant par simple fluctuation statistique, peuvent prendre progressivement de l'ampleur jusqu'à émerger à l'échelle macroscopique, Figure 1-1 b).

Enfin, conséquence de la dualité mécanique entre mouvements et efforts intérieurs, l'hétérogénéité locale des milieux granulaires en mouvement associe:

- d'un côté, l'hétérogénéité dans la répartition des **mouvements intérieurs**, d'où résultent les effets de localisation des déformations;
- d'un autre côté, l'hétérogénéité dans la répartition des **efforts intérieurs**, d'où résultent les effets de concentrations de contraintes en chaînons de forces.

La prise en compte de cette hétérogénéité mécanique de nature statistique, à partir de l'échelle locale, apparaît donc comme une voie privilégiée pour rendre compte des particularités physiques de ces milieux, voie qui ne correspond pas aux schémas élastoplastiques.

Remarquons que dans un milieu granulaire réel en mouvement, par essence discontinu et hétérogène:

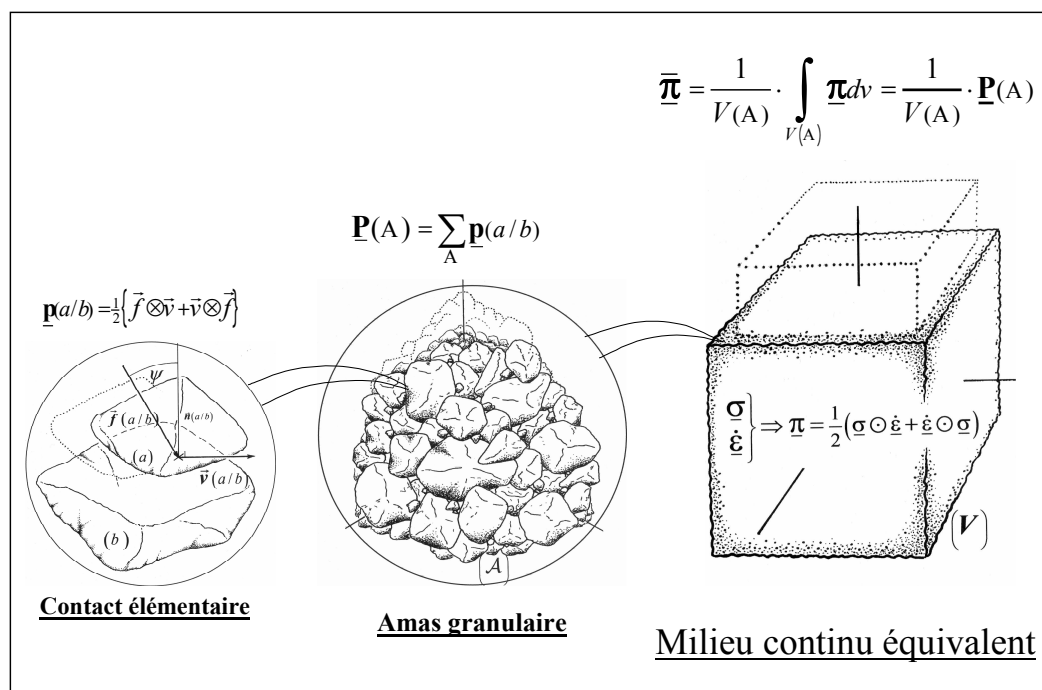
- les concepts de déformations plus ou moins homogènes ou plus ou moins discontinues, n'ont guère de sens physique à l'échelle de l'amas granulaire discontinu, car ces concepts sont attachés à la schématisation en milieu continu équivalent;
- il en est de même pour la répartition des efforts intérieurs;
- si l'on pouvait tirer de la physique statistique du discontinu des lois constitutives, celles-ci devraient donc être, dans une certaine mesure, naturellement compatibles avec l'hétérogénéité mécanique du milieu;
- cette compatibilité devrait en particulier se vérifier pour la dissipation d'énergie, qui est une grandeur physique extensive.

Une approche nouvelle de la mécanique de ces milieux granulaires [17], fondée sur la physique statistique qui régit la dissipation d'énergie par friction aux contacts intergranulaires, a permis récemment d'obtenir explicitement comme résultats du comportement macroscopique, un ensemble notable de propriétés essentielles de la mécanique de ces milieux:

- l'existence d'un Critère de Rupture sous grandes déformations à volume stationnaire (état critique), qui se trouve être précisément le "Critère de Coulomb";
- les effets de dilatance sous forts déviateurs, qui se trouvent suivre précisément les "relations contraintes-dilatance" de P.W.Rowe;
- les effets de densification sous faibles déviateurs, correspondant précisément au concept d'"état caractéristique" de M.P.Luong;

- l'apparition spontanée d'orientations préférentielles dans les glissements locaux, correspondant précisément aux "lignes de glissement des équilibres limite de Rankine".

Cette approche physique nouvelle, part de l'échelle du contact élémentaire, résout le problème du mouvement dans l'amas granulaire discontinu, et intègre la transposition au schéma continu équivalent, en s'appuyant sur un nouveau concept mécanique permettant de relier échelle microscopique (le contact élémentaire) et échelle macroscopique (le milieu continu équivalent): celui des **tenseurs des actions intérieures**, Figure 1-2. Ces tenseurs possèdent une structure fortement conditionnée par les lois élémentaires de la friction, qui se trouve résumée dans une **équation de dissipation d'énergie**. Nommée pour cela l'**"Approche Energétique"**, cette approche contient par ailleurs une **règle énergétique de moindre dissipation**, conséquence de la thermodynamique des processus dissipatifs proches de l'équilibre.



**Figure 1-2 . Le concept d'actions intérieures, clé du passag
microscopique → macroscopique, dans l'Approche Energétique.**

Dans ce contexte, qui part du microscopique pour aller vers le macroscopique, l'objet du présent article est donc l'analyse des traits essentiels des phénomènes de localisation des déformations et de formation de chaînons de contraintes, par l' "Approche Energétique", en milieu hétérogène.

Toutefois, de par sa nature (*du microscopique vers le macroscopique*), cette analyse demande de traiter en préalable la question de la compatibilité des relations constitutives avec l'hétérogénéité mécanique du milieu, afin de répondre à trois questions de fond:

- à quelles conditions l'hétérogénéité est elle admissible dans l'Approche Energétique, quelles sont les relations entre valeurs moyennes, induites par les relations entre valeurs locales ?
- quelles sont les causes physiques qui justifient ces conditions de compatibilité ?

- limitée par ces conditions de compatibilité, l'hétérogénéité admissible est elle encore représentative de la réalité expérimentale de ces milieux?

Nous emploierons pour cela une représentation de l'hétérogénéité consistant à décomposer une grandeur quelconque (à valeurs scalaires, vectorielles, ou tensorielles..) sur le domaine étudié, comme somme d'une composante moyenne et d'une composante de fluctuations locales (à moyenne nulle sur le domaine):

$$G_{(M)} = \bar{G}_{(D)} + \tilde{G}_{(M)} \text{ avec } \int_D \tilde{G}_{(M)} dv = 0.$$

La question des conditions de la compatibilité avec l'hétérogénéité devient alors, pour l'essentiel, celle des conditions requises sur les fluctuations locales.

Dans ce cadre, nous aborderons successivement:

- la **compatibilité avec l'hétérogénéité des actions intérieures**, nous verrons que la structure particulière de l'équation *locale* de dissipation d'énergie résultant de l'Approche Energétique, lui permet directement de demeurer valide en valeurs *moyennes* sur les actions intérieures dans un domaine matériel, tout en intégrant la présence d'hétérogénéités fortes. Nous montrerons aussi que cette compatibilité est naturellement assurée au voisinage de la dissipation minimale;
- la **compatibilité avec l'hétérogénéité des contraintes et vitesses de déformations**, ou encore la relation entre propriétés **locales** et propriétés **moyennes** concernant cette fois les contraintes et vitesses de déformations. Nous verrons d'abord sur un type particulier de situations (coaxialité à repère fixe), que la compatibilité est effectivement assurée, vis à vis d'hétérogénéités séparées ou simultanées, incluant des déformations localisées et des concentrations de contraintes en chaînons de forces, pourvu que soient vérifiées certaines limitations sur les covariances. Nous montrerons ensuite dans le cas général, que des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité s'obtiennent par l'analyse des circonstances particulières à la moindre dissipation, et constituent une extension tensorielle de la classique "Condition de Macro-Homogénéité de Hill-Mandel". Ces conditions impliquent que la vérification *locale* de l'équation de dissipation de l'Approche Energétique, lui permet effectivement de demeurer valide en valeurs *moyennes* sur les contraintes et taux de déformation dans un domaine matériel, tout en intégrant la présence d'hétérogénéités fortes.

Ces deux résultats essentiels permettant de raisonner simplement sur les grandeurs moyennes malgré l'hétérogénéité, nous aborderons ensuite:

- l'**orientation** des bandes de localisation ainsi que celle des chaînons de contraintes, où l'Approche Energétique nous fera retrouver des valeurs classiques, tout en montrant que la relation entre dilatance et orientation des bandes dépend en fait du type de micromécanisme de déformation;
- la **structure interne macroscopique des bandes de localisation**, où nous montrerons que la structure donnée par l'Approche Energétique correspond

précisément à celle obtenue dans les mesures fines récentes de S.Nemat-Nasser et N.Okada ([9]). La confrontation entre les deux, nous permettra de préciser les principales caractéristiques internes des bandes de localisation, en fonction des paramètres matériels du milieu, et en particulier en fonction du diamètre moyen des granulats, telles le profil de dissipation relative en fonction de la largeur, le coefficient de concentration maximal par rapport au mouvement moyen, etc.;

- la **structure interne macroscopique des chaînons de contraintes**, pour laquelle des conditions particulières (condition d'équilibre, critère de rupture macroscopique) induisent une séparation d'échelle avec les structures des bandes de localisation, et en font des structures faibles à l'échelle macroscopique;
- le **critère d'apparition de la localisation**, que l'Approche Energétique envisage comme une forme particulière de développement de l'hétérogénéité, induit par la règle de la moindre dissipation. Nous verrons que le critère résultant est basé sur la non-convexité de la dissipation spécifique ($\delta^2 \dot{\omega}_s < 0$) vis à vis de fluctuations corrélées entre le volume spécifique et la déformation cumulée, et que ce critère donne des indications conformes aux observations expérimentales;
- en dernier lieu, **l'évolution d'un système de bandes de localisation** parallèles, où nous montrerons que l'ensemble des résultats précédents conduit explicitement, sous sollicitation monotone, à la concentration en une bande unique, elle même de concentration maximale, c'est à dire un micromécanisme de génération d'une **ligne de rupture**.